CH.28 : INDUCTION ELECTROMAGNETIQUE

Plan *(Cliquer sur le titre pour accéder au paragraphe)*

* *

* *

I. PHENOMENES D'INDUCTION ELECTROMAGNETIQUE

I.1. FORCE ELECTROMOTRICE INDUITE

• L'étude expérimentale (menée en particulier par M.Faraday en 1831) montre que l'apparition d'un courant induit dans un circuit fermé (ne comportant pas de générateur tel que pile, condensateur chargé…) est toujours liée à une **variation temporelle du flux magnétique à travers le circuit.**

• Pour qu'un courant apparaisse, il faut que des porteurs de charge aient été mis en mouvement par l'action de forces motrices $\vec{f}_{mot}$ (en Newton) ; on appellera « **force électromotrice** » ou « **f.e.m** » (en Volt) la grandeur :

$$\boxed{e = \frac{1}{q}\oint_{circuit} \vec{f}_{mot} \cdot d\vec{l}}$$ (où q est la charge des porteurs)

I.2. LOI DE FARADAY

En notant φ le flux du champ magnétique à travers le circuit, on vérifie :

$$\boxed{e = -\frac{d\varphi}{dt}}$$

Rq1 : la relation est **algébrique** : a) on oriente le sens du courant i
b) on oriente φ (règle du tire-bouchon, par exemple)
c) le sens positif de e est celui de i (**convention <u>générateur</u>**)

Rq2 : pour appliquer cette relation, il faut que le flux varie de façon **continue** : pour un circuit qui s'ouvre à certains instants (circuit « **en commutation** »), on ne peut pas l'utiliser (même si le programme recommande d'éviter ce genre de situation, nous verrons que cela arrive dans l'exemple « incontournable » de la « roue de Barlow »)

I.3. LOI DE LENZ

• Le signe moins de la relation précédente traduit mathématiquement la **loi de Lenz** (qui est une loi de modération, au même titre que la **loi de Le Châtelier** pour les équilibres chimiques) :
« le sens du courant induit est tel que son **effet** (le champ magnétique qu'il crée à son tour) **tend à s'opposer** à la **cause** qui lui a donné naissance (la variation temporelle du flux) »
• On pensera à utiliser cette loi pour **déterminer** ou **vérifier** le signe de certaines grandeurs dans les exercices.

II. CIRCUIT FIXE DANS UN CHAMP NON PERMANENT

II.1. RELATION DE MAXWELL-FARADAY

• Ici, l'apparition de forces motrices sur des charges initialement au repos dans le référentiel d'étude peut s'interpréter par l'existence d'un **champ <u>électrique</u> induit** $\vec{E}_i$: notons immédiatement qu'à la différence d'un champ d'origine électrostatique, sa **circulation** le long d'un **contour fermé** n'est **pas nulle**.

• $e = \oint_C \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\dfrac{d\varphi}{dt} = \iint_S \overrightarrow{rot}\vec{E}_i \cdot d\vec{S} = -\dfrac{d}{dt}[\iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}] = \iint_S -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$ (où S est une surface s'appuyant sur C)

Rq : on a pu intervertir les opérateurs de dérivation temporelle et d'intégration spatiale, car les coordonnées de (S) sont indépendantes du temps, **le circuit étant fixe.**

• La relation précédente étant vraie quelle que soit (S), il vient :
$\overrightarrow{rot}\vec{E}_i = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$; ce champ induit se superpose éventuellement à un champ électrostatique $\vec{E}_{st}$ tel que : $\overrightarrow{rot}\vec{E}_{st} = \vec{0} \Rightarrow$ le champ total : $\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_{st}$ satisfera à l'équation de **Maxwell-Faraday :**

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

II.2. RELATION ENTRE LE CHAMP ELECTRIQUE ET LES POTENTIELS

On a toujours : $\vec{B} = \overrightarrow{rot}\vec{A} \Rightarrow \overrightarrow{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{rot}\vec{A}) = \overrightarrow{rot}(-\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}) \Rightarrow \overrightarrow{rot}(\vec{E} + \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = \vec{0}$; la grandeur $\vec{E} + \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ dérive donc d'un potentiel scalaire V, ce que l'on écrira :

$$\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}}$$

Rq : en régime statique, V s'identifie avec le potentiel électrostatique ; en revanche, il est plus délicat d'identifier $\vec{E}_i$ avec $-\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, car il ne faut pas oublier la grande indétermination des potentiels : on pourra vérifier que tout couple $\vec{A}'=\vec{A}+\overrightarrow{grad}\,f$ et: $V'=V-\dfrac{\partial f}{\partial t}$ (où f est une fonction quelconque) engendre le même champ $\vec{E}$.

III. CIRCUIT MOBILE DANS UN CHAMP B PERMANENT

On considère cette fois un circuit (C) tel que chaque point courant P de ce circuit est animé d'une vitesse $\vec{v}_e(P)$ par rapport au référentiel d'étude (R), où règne un champ magnétique **permanent** : cette vitesse est une vitesse **d'entraînement locale** pour les porteurs de charge ; la force motrice sera alors la partie « magnétique » de la force de Lorentz, soit $q\vec{v}_e\wedge\vec{B}$; la f.e.m induite sur (C) sera donnée par :

$$\boxed{e=\oint_C(\vec{v}_e\wedge\vec{B})\cdot d\vec{l}}$$

IV. CAS GENERAL

IV.1. LIEN ENTRE LES DEUX PHENOMENES PRECEDENTS

• Le principe de relativité postule l'**invariance** des forces fondamentales (gravitationnelles, électromagnétiques, nucléaires) lors d'un **changement de référentiel** ; de même, l'existence objective d'un courant induit ne doit pas dépendre du référentiel d'observation.

• Or, lorsqu'on examine l'expression de la force de Lorentz, on constate que le terme $q\vec{v}\wedge\vec{B}$ dépend du référentiel d'étude (dans un référentiel lié à la particule, la partie « magnétique » de la force est nulle...) : pour que la force reste invariante, il faut que le **champ électrique** soit « **transformé** » lors du changement de référentiel.

• Considérons un référentiel (R') en translation à la vitesse $\vec{v}_{R'/R}=\vec{v}_e$ par rapport à un référentiel (R) ; alors pour un point M quelconque : $\vec{v}_R(M)=\vec{v}_{R'}(M)+\vec{v}_e$ (composition des vitesses galiléenne). L'invariance de la force de Lorentz s'exprimera par :

$$q(\vec{E}_{R'}+\vec{v}_{R'}\wedge\vec{B}_{R'})=q(\vec{E}_R+\vec{v}_R\wedge\vec{B}_R)=q(\vec{E}_R+\vec{v}_e\wedge\vec{B}_R+\vec{v}_{R'}\wedge\vec{B}_R)$$

Cette relation devant être vérifiée quelles que soient $\vec{v}_e$ et $\vec{v}_{R'}$, il vient :

$$\boxed{\vec{E}_{R'}=\vec{E}_R+\vec{v}_{R'/R}\wedge\vec{B}_R\quad\text{et:}\quad\vec{B}_{R'}=\vec{B}_R}\qquad(1)$$

Ce sont les formules de **transformation** du champ électromagnétique par changement de référentiel, dans le cadre de la mécanique **galiléenne**.

• Ainsi, dans le cas du paragraphe III, un observateur lié au référentiel « fixe » interprétera la force comme un effet d'un champ purement **magnétique** ($\vec{E}=\vec{0}$), mais un observateur lié au circuit la considérera comme une conséquence d'un champ **électrique** $\vec{E}'=\vec{v}_e\wedge\vec{B}$.

Par ailleurs, du **point de vue du circuit**, on peut se ramener au cas du paragraphe II : en effet, un circuit se déplaçant dans un champ **permanent** , mais **non uniforme**, « verra » un champ magnétique qui dépend du temps (non pas localement, mais « en suivant le mouvement » du circuit : on retrouve une notion analogue en mécanique des fluides).

Ceci montre que le champ « **électromagnétique** » est un couple $(\vec{E},\vec{B})$ qu'on ne peut pas dissocier, sauf en statique.
Rq : les relations (1), obtenues à partir de la loi de composition des vitesses **galiléenne**, ne sont en fait pas compatibles avec toutes les lois de l'électromagnétisme : les formules précises sont obtenues dans le cadre de la **Relativité Restreinte** (A.Einstein, 1905).

IV.2. EXPRESSION DE LA F.E.M

Lorsqu'on superpose les différentes causes de variation du flux (déplacement du circuit, déformation du circuit, champ magnétique non permanent…), on obtient :

$$\boxed{e=\oint_C(-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+\vec{v}_e\wedge\vec{B})\cdot d\vec{l}}$$

Rq : la grandeur $(-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}+\vec{v}_e\wedge\vec{B})$ est parfois appelée « champ électromoteur ».

V. PHENOMENES D'AUTO-INDUCTION

V.1. DEFINITION DU PHENOMENE

Des courants extérieurs au circuit étudié créent un champ magnétique extérieur noté $\vec{B}_{ext}$, dont les variations de flux génèrent des courants induits dans le circuit : ces courants vont à leur tour créer un champ magnétique « propre » noté $\vec{B}_P$.

Les variations temporelles du flux de $\vec{B}_P$ (noté φ_P) à travers le circuit lui-même engendrent une f.e.m e_P telle que : $\boxed{e_P=-\frac{d\varphi_P}{dt}}$

C'est la **f.e.m d'auto-induction**.

Rq : il faut donc avoir conscience du fait que le champ total est : $\vec{B}=\vec{B}_{ext}+\vec{B}_P$; c'est ce champ qu'il faut utiliser pour calculer le flux total ; l'énoncé précisera parfois que l'on peut négliger le champ propre devant le champ d'origine extérieure, ce qui revient à négliger le phénomène d'auto- induction devant celui d'induction.

V.2. INDUCTANCE PROPRE

• Nous avons vu dans le chapitre 27 que l'équation $\overrightarrow{rot}\vec{B}=\mu_0\vec{j}$ était incomplète en régime non permanent, puisque incompatible avec la conservation de la charge ; dans le chapitre suivant, nous verrons que le terme « manquant » est lié aux variations temporelles du champ électrique : nous admettrons que dans le cadre de l'Approximation des Régimes Quasi-Permanents (**A.R.Q.P**) ce terme est négligeable devant $\mu_0\vec{j}$.

La **loi de Biot et Savart**, qui en découle, **reste** donc **valable**.

• En considérant un circuit (C) parcouru par un courant i, sur lequel s'appuie une surface (S) quelconque, nous avons donc :

$\varphi_P=\iint_S\vec{B}_P\cdot d\vec{S}$ et: $\vec{B}_P=\frac{\mu_0 i}{4\pi}\oint_C d\vec{l}\wedge\frac{\vec{u}}{r^2}\Rightarrow\|\vec{B}_P\|$ et donc φ_P sont **PROPORTIONNELS** à i ;on pose :

$$\boxed{\varphi_P=Li}$$

où L (en Henry, H) est l'**inductance propre** du circuit, ou **coefficient d'auto-induction** (**L>0**).

VI. INDUCTION MUTUELLE DE DEUX CIRCUITS FILIFORMES

- Soient 2 circuits orientés (C1) et (C2), parcourus par des courants respectifs i_1 et i_2, sur lesquels s'appuient respectivement des surfaces (S1) et (S2) ; on notera $\vec{B}_1$ le champ magnétique créé par (C1) et $\vec{B}_2$ celui créé par (C2) ; enfin, $\vec{A}_1$ et $\vec{A}_2$ seront les potentiel-vecteurs correspondants.
- Nous avons alors : $\varphi_{11} = \iint_{S_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_1$ et: $\varphi_{22} = \iint_{S_2} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_2$, qui sont respectivement les flux **propres** à travers (C1) et (C2) ; de même :

$\varphi_{2/1} = \iint_{S_1} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_1$ et: $\varphi_{1/2} = \iint_{S_2} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_2$ sont respectivement les flux envoyés par (C2) à travers (C1) et par (C1) à travers (C2).

$$\varphi_{2/1} = \oint_{C_1} \vec{A}_2 \cdot d\vec{l}_1 \quad \text{avec: } \vec{A}_2 = \frac{\mu_0 i_2}{4\pi} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_2}{r_{12}} \quad (r_{12} = \text{distance mutuelle entre 2 points courants } P_1 \text{ et } P_2 \text{ de } (C_1) \text{ et } (C_2))$$

Par linéarité, on peut poser : $$\boxed{\varphi_{2/1} = M_{2/1} i_2 \quad \text{avec: } M_{2/1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2}{r_{12}}}$$

(relation de Neumann)

- La formule de Neumann étant **symétrique**, on a aussi :

$\boxed{\varphi_{1/2} = M_{1/2} i_1 \quad \text{avec: } M_{1/2} = M_{2/1} = M}$ = « **inductance mutuelle** de (C1) et (C2) » en Henry (**H**)

- Le flux magnétique total s'écrit donc : $$\boxed{\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_{11} + \varphi_{2/1} = L_1 i_1 + M i_2 \\ \varphi_2 &= \varphi_{22} + \varphi_{1/2} = L_2 i_2 + M i_1 \end{aligned}}$$

Rq1 : M représente donc les phénomènes d'**induction** d'un circuit sur l'autre, alors que les coefficients **L** représentent les phénomènes d'**auto-induction**.

Rq2 : le signe de M dépend des conventions d'orientation des circuits et n'a pas de signification physique.

Rq3 : on introduit parfois la grandeur : $k = \dfrac{|M|}{\sqrt{L_1 L_2}}$, appelée « **coefficient de couplage** » des circuits (C1) et (C2) (on parlera de « couplage serré » ou de « couplage lâche »).

VII. ENERGIE MAGNETIQUE

VII.1. CAS DES CIRCUITS FILIFORMES

- **circuit unique:** on montre que l'énergie magnétique emmagasinée par un circuit parcouru par un courant i et soumis à un flux magnétique φ s'exprime par :

$$\boxed{W_M = \frac{1}{2}\varphi \times i} \quad \text{et dans le cadre de l'ARQP : } \quad \boxed{W_M = \frac{1}{2} L i^2}$$

• **cas de 2 circuits**: $\boxed{W_M = \frac{1}{2}(\varphi_1 i_1 + \varphi_2 i_2)}$

et dans le cadre de l'ARQP : $\boxed{W_M = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2}$

VII.2. DENSITE VOLUMIQUE D'ENERGIE MAGNETIQUE

Pour un solénoïde illimité de longueur L et comportant N spires, nous savons que :

$\vec{B}_{ext} = \vec{0}$ et: $\left|\vec{B}_{\text{int}}\right| = \mu_0 \frac{Ni}{L}$, ce champ intérieur étant **uniforme**.

Le flux total à travers les N spires s'exprime donc simplement par : $\varphi = NBS$ (S= section d'une spire) $\Rightarrow$ $W_M = \frac{1}{2}\varphi \times i = \frac{1}{2}\mu_0 \frac{N^2 i^2 S}{L} = \frac{1}{2}\frac{\mu_0^2 N^2 i^2}{L^2} \times \frac{SL}{\mu_0} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0} \times V$

où V = volume du solénoïde ; on a alors la « **densité volumique d'énergie magnétique** » :

$$\boxed{w_M = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0}} \qquad (\text{ en } J.m^{-3})$$

Rq : cette formule, établie dans le cas très particulier du solénoïde infini, est en fait **GENERALE** et sera, en régime non permanent, **indissociable** de celle vue pour le champ électrique, soit : $w_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$.

****