Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Montrer que pour tous entiers n, p tels que $2 \leq p \leq n-2$: $\mathrm{C}_n^p = \mathrm{C}_{n-2}^p + 2\mathrm{C}_{n-2}^{p-1} + \mathrm{C}_{n-2}^{p-2}$.

On donnera deux démonstrations distinctes (sans utiliser la formule donnant les C_n^k.)

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Montrer que pour tout entier $n \geq 1$

1. $\mathrm{C}_n^0 - \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 - \cdots + (-1)^n \mathrm{C}_n^n = 0$.
2. $\mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^2 + \mathrm{C}_n^4 + \cdots = \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^3 + \mathrm{C}_n^5 + \cdots = 2^{n-1}$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Quel est le terme maximum dans le développement de $(17+38)^{23}$?

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

- Utiliser la formule qui est à la base du triangle de Pascal.
- Par dénombrement, on se donne un ensemble E ayant $n \geq 2$ éléments, et $a \neq b$ dans E.
  On utilise a et b pour dénombrer les parties X de E ayant p éléments.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

1. $0 = (1-1)^n$
2. Nommer A et B les deux sommes. Utiliser $A+B$ et $A-B$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Considérer le terme général $u_k = \mathrm{C}_{23}^{k}\, 17^k 38^{n-k}$ du développement.

Étudier le rapport $\dfrac{u_k}{u_{k-1}}$. Le coefficient maximum est u_7.

Corrigés des exercices

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

– On peut utiliser la formule qui est à la base du triangle de Pascal. On a en effet :

$$\begin{aligned} \mathrm{C}_n^p &= \mathrm{C}_{n-1}^p + \mathrm{C}_{n-1}^{p-1} = (\mathrm{C}_{n-2}^p + \mathrm{C}_{n-2}^{p-1}) + (\mathrm{C}_{n-2}^{p-1} + \mathrm{C}_{n-2}^{p-2}) \\ &= \mathrm{C}_{n-2}^p + 2\mathrm{C}_{n-2}^{p-1} + \mathrm{C}_{n-2}^{p-2} \end{aligned}$$

– Il y a une autre méthode utilisant un calcul de dénombrement.

Soit E un ensemble ayant n éléments, avec $n \geq 2$.

Soient a et b deux éléments fixés dans E.

On se propose de dénombrer les parties X de E ayant p éléments, avec $p \geq 2$.

On sait qu'il y a C_n^p solutions X distinctes.

Chacune d'elles figure dans l'un et dans l'un seulement des cas suivants :

  – X ne contient ni a ni b. Il y a C_{n-2}^p solutions possibles (choisir p éléments parmi les $n-2$ éléments de E qui sont distincts de a et b.)
  – X contient a mais il ne contient pas b. Il reste à choisir $p-1$ éléments parmi ceux de E qui sont distincts de a et b : il y a C_{n-2}^{p-1} choix possibles.
  – X contient b mais pas a. Là encore il y a C_{n-2}^{p-1} solutions.
  – X contient a et b. Il y a C_{n-2}^{p-2} manières de choisir les $p-2$ autres éléments dans $E \setminus \{a, b\}$.

Finalement, le décompte ainsi opéré donne : $\mathrm{C}_n^p = \mathrm{C}_{n-2}^p + 2\mathrm{C}_{n-2}^{p-1} + \mathrm{C}_{n-2}^{p-2}$

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

1. On développe $0 = (1-1)^n$ par la formule du binôme.
   $0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_n^0 - \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 - \cdots + (-1)^n \mathrm{C}_n^n$
2. On sait que $A = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \cdots + \mathrm{C}_n^{n-1} + \mathrm{C}_n^n = (1+1)^n = 2^n$.
   On vient de voir que $B = \mathrm{C}_n^0 - \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 - \cdots + (-1)^n \mathrm{C}_n^n = 0$.
   On en déduit, par demi-somme et demi-différence :
   $\mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^2 + \mathrm{C}_n^4 + \cdots = \dfrac{A+B}{2} = 2^{n-1}$.
   $\mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^3 + \mathrm{C}_n^5 + \cdots = \dfrac{A-B}{2} = 2^{n-1}$.
   On peut interpréter ce résultat en disant que dans un ensemble fini E non vide, il y a autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair (si l'ensemble E est lui-même de cardinal impair, on s'en rend compte de manière évidente en considérant la bijection $A \mapsto \overline{A}$ de $\mathcal{P}(E)$ dans lui-même.)

Corrigé de l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

On écrit $(17+38)^{23} = \sum_{k=0}^{23} u_k$, avec $u_k = \mathrm{C}_{23}^{k}\, 17^k 38^{n-k} = \dfrac{23!}{k!(23-k)!} 17^k 38^{n-k}$.

Pour tout k de $\{1, \ldots, 23\}$, on a : $\dfrac{u_k}{u_{k-1}} = \dfrac{24-k}{k}\dfrac{17}{38}$.

On en déduit : $u_k \geq u_{k-1} \Leftrightarrow 17(24-k) \geq 38k \Leftrightarrow k \leq \dfrac{408}{55} \Leftrightarrow k \leq 7$.

Ainsi la suite (u_k) est croissante de u_0 jusqu'à u_7, puis décroissante de u_7 à u_{23}.
Le terme maximum dans le développement est donc $u_7 = \mathrm{C}_{23}^{7}\, 17^7 38^{16} \approx 1.9 \cdot 10^{39}$.