Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Montrer que pour tous entiers n, p tels que $2 \leq p \leq n-2$: $\mathrm{C}_n^p = \mathrm{C}_{n-2}^p + 2\mathrm{C}_{n-2}^{p-1} + \mathrm{C}_{n-2}^{p-2}$.

On donnera deux démonstrations distinctes (sans utiliser la formule donnant les C_n^k.)

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Montrer que pour tout entier $n \geq 1$

1. $\mathrm{C}_n^0 - \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 - \cdots + (-1)^n \mathrm{C}_n^n = 0$.
2. $\mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^2 + \mathrm{C}_n^4 + \cdots = \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^3 + \mathrm{C}_n^5 + \cdots = 2^{n-1}$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Quel est le terme maximum dans le développement de $(17+38)^{23}$?

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

- Utiliser la formule qui est à la base du triangle de Pascal.
- Par dénombrement, on se donne un ensemble E ayant $n \geq 2$ éléments, et $a \neq b$ dans E.
  On utilise a et b pour dénombrer les parties X de E ayant p éléments.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

1. $0 = (1-1)^n$
2. Nommer A et B les deux sommes. Utiliser $A+B$ et $A-B$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Considérer le terme général $u_k = \mathrm{C}_{23}^k 17^k 38^{n-k}$ du développement.

Étudier le rapport $\dfrac{u_k}{u_{k-1}}$. Le coefficient maximum est u_7.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

– On peut utiliser la formule qui est à la base du triangle de Pascal. On a en effet :

$$\begin{aligned} \mathrm{C}_n^p &= \mathrm{C}_{n-1}^p + \mathrm{C}_{n-1}^{p-1} = (\mathrm{C}_{n-2}^p + \mathrm{C}_{n-2}^{p-1}) + (\mathrm{C}_{n-2}^{p-1} + \mathrm{C}_{n-2}^{p-2}) \\ &= \mathrm{C}_{n-2}^p + 2\mathrm{C}_{n-2}^{p-1} + \mathrm{C}_{n-2}^{p-2} \end{aligned}$$

– Il y a une autre méthode utilisant un calcul de dénombrement.

Soit E un ensemble ayant n éléments, avec $n \geq 2$.

Soient a et b deux éléments fixés dans E.

On se propose de dénombrer les parties X de E ayant p éléments, avec $p \geq 2$.

On sait qu'il y a C_n^p solutions X distinctes.

Chacune d'elles figure dans l'un et dans l'un seulement des cas suivants :

– X ne contient ni a ni b. Il y a C_{n-2}^p solutions possibles (choisir p éléments parmi les $n-2$ éléments de E qui sont distincts de a et b.)

– X contient a mais il ne contient pas b. Il reste à choisir $p-1$ éléments parmi ceux de E qui sont distincts de a et b : il y a C_{n-2}^{p-1} choix possibles.

– X contient b mais pas a. Là encore il y a C_{n-2}^{p-1} solutions.

– X contient a et b. Il y a C_{n-2}^{p-2} manières de choisir les $p-2$ autres éléments dans $E \setminus \{a, b\}$.

Finalement, le décompte ainsi opéré donne : $\mathrm{C}_n^p = \mathrm{C}_{n-2}^p + 2\mathrm{C}_{n-2}^{p-1} + \mathrm{C}_{n-2}^{p-2}$

Corrigé de l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

1. On développe $0 = (1-1)^n$ par la formule du binôme.

$$0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \mathrm{C}_n^k = \mathrm{C}_n^0 - \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 - \cdots + (-1)^n \mathrm{C}_n^n$$

2. On sait que $A = \mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^1 + \cdots + \mathrm{C}_n^{n-1} + \mathrm{C}_n^n = (1+1)^n = 2^n$.
On vient de voir que $B = \mathrm{C}_n^0 - \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 - \cdots + (-1)^n \mathrm{C}_n^n = 0$.
On en déduit, par demi-somme et demi-différence :

$$\mathrm{C}_n^0 + \mathrm{C}_n^2 + \mathrm{C}_n^4 + \cdots = \frac{A+B}{2} = 2^{n-1}.$$

$$\mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^3 + \mathrm{C}_n^5 + \cdots = \frac{A-B}{2} = 2^{n-1}.$$

On peut interpréter ce résultat en disant que dans un ensemble fini E non vide, il y a autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair (si l'ensemble E est lui-même de cardinal impair, on s'en rend compte de manière évidente en considérant la bijection $A \mapsto \overline{A}$ de $\mathcal{P}(E)$ dans lui-même.)

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Corrigé de l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

On écrit $(17+38)^{23} = \sum_{k=0}^{23} u_k$, avec $u_k = \mathrm{C}_{23}^{k}\, 17^k 38^{n-k} = \dfrac{23!}{k!(23-k)!}\, 17^k 38^{n-k}$.

Pour tout k de $\{1, \ldots, 23\}$, on a : $\dfrac{u_k}{u_{k-1}} = \dfrac{24-k}{k}\,\dfrac{17}{38}$.

On en déduit : $u_k \geq u_{k-1} \Leftrightarrow 17(24-k) \geq 38k \Leftrightarrow k \leq \dfrac{408}{55} \Leftrightarrow k \leq 7$.

Ainsi la suite (u_k) est croissante de u_0 jusqu'à u_7, puis décroissante de u_7 à u_{23}.
Le terme maximum dans le développement est donc $u_7 = \mathrm{C}_{23}^{7}\, 17^7 38^{16} \approx 1.9 \cdot 10^{39}$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021