Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [Indication] [Correction]

Soit n un entier naturel. Calculer les sommes :

- $A = \mathrm{C}_n^0 + 2\mathrm{C}_n^2 + \cdots + 2^p\mathrm{C}_n^{2p} + \cdots$.
- $B = \mathrm{C}_n^1 + 2\mathrm{C}_n^3 + \cdots + 2^p\mathrm{C}_n^{2p+1} + \cdots$.

EXERCICE 2 [Indication] [Correction]

Soit n un entier naturel non nul.

Calculer $A = \mathrm{C}_n^1 + 2\mathrm{C}_n^2 + \cdots + n\mathrm{C}_n^n = \sum_{k=1}^{n} k\mathrm{C}_n^k$.

On donnera trois méthodes différentes!

EXERCICE 3 [Indication] [Correction]

Soit n un entier naturel non nul.

Calculer $B = \mathrm{C}_n^0 + \frac{1}{2}\mathrm{C}_n^1 + \frac{1}{3}\mathrm{C}_n^2 + \cdots + \frac{1}{n+1}\mathrm{C}_n^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\mathrm{C}_n^k$.

On donnera deux méthodes différentes!

EXERCICE 4 [Indication] [Correction]

Pour tout entier naturel n, calculer $A = \mathrm{C}_n^1 + 2^2\mathrm{C}_n^2 + \cdots + n^2\mathrm{C}_n^n = \sum_{k=1}^{n} k^2\mathrm{C}_n^k$.

On donnera deux méthodes différentes!

EXERCICE 5 [Indication] [Correction]

Soient n et p deux entiers naturels. Prouver que $\sum_{k=n}^{p} \mathrm{C}_k^n = \mathrm{C}_{p+1}^{n+1}$.

On donnera trois méthodes différentes!

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

On utilise le développement de $(1+x)^n$, avec $x = \pm\sqrt{2}$.

On trouve $A = \dfrac{1}{2}\left((1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n\right)$ et $B = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left((1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\right)$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

- *Première méthode* : Utiliser $k\mathrm{C}_n^k = n\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}$.
- *Deuxième méthode* : Dériver $(1+x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k x^k$.
- *Troisième méthode* :

  $A = \sum\limits_{k=0}^{n} k\mathrm{C}_n^k = \sum\limits_{X \subset E} \operatorname{Card} X$ (somme étant étendue à toutes les parties X de E.).

  Mais on peut aussi écrire $A = \sum\limits_{X \subset E} \operatorname{Card} \overline{X}$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

- *Première méthode* : Utiliser $\dfrac{1}{k+1}\mathrm{C}_n^k = \dfrac{1}{n+1}\mathrm{C}_{n+1}^{k+1}$.
- *Deuxième méthode* : Intégrer $(1+x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k x^k$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

- *Première méthode* : Utiliser $k(k-1)\mathrm{C}_n^k = n(n-1)\mathrm{C}_{n-2}^{k-2}$.
- *Deuxième méthode* : Dériver deux fois $(1+x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k x^k$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

- *Première méthode* : Par récurrence sur p, à n fixé.
- *Deuxième méthode* : Utiliser $\mathrm{C}_k^n = \mathrm{C}_{k+1}^{n+1} - \mathrm{C}_k^{n+1}$.
- *Troisième méthode* :

  Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties de $\{1, 2, \ldots, p+1\}$ qui ont $n+1$ éléments.

  Faire un dénombrement des X de $\mathcal{A}$ suivant la valeur de $\max(X)$.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

On utilise le développement de $(1+x)^n$, avec $x = \pm\sqrt{2}$. On trouve en effet :

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{2})^n &= \sum_{k=0}^{n} (\sqrt{2})^k \mathrm{C}_n^k \\ &= \mathrm{C}_n^0 + \sqrt{2}\mathrm{C}_n^1 + 2\mathrm{C}_n^2 + 2\sqrt{2}\mathrm{C}_n^3 + 2^2\mathrm{C}_n^4 + 2^2\sqrt{2}\mathrm{C}_n^5 + \cdots \\ &= A + B\sqrt{2}\end{aligned}$$

De même, $(1-\sqrt{2})^n = A - B\sqrt{2}$.

On en déduit : $A = \dfrac{1}{2}\left((1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n\right)$ et $B = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left((1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\right)$.

Corrigé de l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

– *Première méthode* :

On a $A = \sum_{k=1}^{n} k\mathrm{C}_n^k$. Or $k\mathrm{C}_n^k = \dfrac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}$.

On en déduit $A = n\sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_{n-1}^{k-1} = n\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{C}_{n-1}^{k} = n2^{n-1}$.

– *Deuxième méthode* :

Pour tout réel x, on sait que $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k x^k$.

Si on dérive cette égalité par rapport à x, on trouve : $\forall x \in \mathbb{R}, n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\mathrm{C}_n^k x^{k-1}$.

En particulier avec $x = 1$, on obtient : $\sum_{k=1}^{n} k\mathrm{C}_n^k = n2^{n-1}$.

– *Troisième méthode* :

C_n^k est le nombre de parties à k éléments de $E = \{1, \ldots, n\}$.

Donc $A = \sum_{k=0}^{n} k\mathrm{C}_n^k = \sum_{X \subset E} \operatorname{Card} X$ (somme étant étendue à toutes les parties X de E.)

Or quand X décrit $\mathcal{P}(E)$, $\overline{X}$ décrit lui aussi $\mathcal{P}(E)$.

On peut donc également écrire :

$A = \sum_{X\subset E} \operatorname{Card} \overline{X} = \sum_{X\subset E} (n - \operatorname{Card} X) = n \sum_{X\subset E} 1 - \sum_{X\subset E} \operatorname{Card} X = n2^n - A$.

On retrouve donc bien $A = n2^{n-1}$.

Corrigé de l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

- *Première méthode* :

  Comme pour A, on note que $(n+1)\mathrm{C}_n^k = (k+1)\mathrm{C}_{n+1}^{k+1}$ donc $\dfrac{1}{k+1}\mathrm{C}_n^k = \dfrac{1}{n+1}\mathrm{C}_{n+1}^{k+1}$.

  Ainsi : $B = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\mathrm{C}_n^k = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_{n+1}^{k+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\mathrm{C}_{n+1}^{k} = \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$

- *Deuxième méthode* :

  On intègre l'égalité $(1+x)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k x^k$ entre 0 et x.

  On trouve $\dfrac{1}{n+1}((1+x)^{n+1}-1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k \frac{1}{k+1}x^{k+1}$.

  On donne à x la valeur 1 et on obtient : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\mathrm{C}_n^k = \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$.

Corrigé de l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Première méthode :

On note que $C = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,\mathrm{C}_n^k + \sum_{k=1}^{n} k(k-1)\,\mathrm{C}_n^k = \sum_{k=1}^{n} k\,\mathrm{C}_n^k + \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\,\mathrm{C}_n^k$.

Comme on l'a vu dans l'exercice précédent, $A = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,\mathrm{C}_n^k = n2^{n-1}$.

D'autre part, pour tout $k \geq 2$: $k(k-1)\mathrm{C}_n^k = n(n-1)\mathrm{C}_{n-2}^{k-2}$.

Donc $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\,\mathrm{C}_n^k = n(n-1)\sum_{k=2}^{n}\mathrm{C}_{n-2}^{k-2} = n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\mathrm{C}_{n-2}^{k} = n(n-1)2^{n-2}$.

On en déduit $C = n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} = n(n+1)2^{n-2}$.

Deuxième méthode :

On dérive deux fois $f(x) = (1+x)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k x^k$.

$$\begin{cases} f'(x) = n(1+x)^{n-1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\mathrm{C}_n^k x^{k-1} \\ f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2} = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\mathrm{C}_n^k x^{k-2} \end{cases}$$

En particulier, avec $x=1$:

$f'(1) = n2^{n-1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\mathrm{C}_n^k$ et $f''(1) = n(n-1)2^{n-2} = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\mathrm{C}_n^k$.

On démarre la deuxième somme à $k=1$. On ajoute les deux sommes et on trouve :

$C = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2\mathrm{C}_n^k = f'(1) + f''(1) = n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} = n(n+1)2^{n-2}$.

Corrigé de l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

- *Première méthode*

  On procède par récurrence sur p, à n fixé.

  On constate que la propriété est vraie si $p = n$ (c'est le pas initial.)

  Supposons qu'elle le soit pour un certain entier $p \geq n$. Alors, au rang $p+1$, on a :

  $$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{p+1} \mathrm{C}_k^n &= \sum_{k=n}^{p} \mathrm{C}_k^n + \mathrm{C}_{p+1}^n \\ &= \mathrm{C}_{p+1}^{n+1} + \mathrm{C}_{p+1}^n \quad \text{(hypothèse de récurrence)} \\ &= \mathrm{C}_{p+2}^{n+1} \quad \text{(triangle de Pascal)}\end{aligned}$$

  Ce qui prouve la propriété au rang $p+1$ et donc achève la récurrence.

- *Deuxième méthode*

  On utilise là encore la propriété qui est à la base du triangle de Pascal.

  Pour tout entier $k > n$, on a : $\mathrm{C}_k^n = \mathrm{C}_{k+1}^{n+1} - \mathrm{C}_k^{n+1}$. On en déduit :

  $$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{p} \mathrm{C}_k^n &= \mathrm{C}_n^n + \sum_{k=n+1}^{p} \mathrm{C}_k^n = 1 + \sum_{k=n+1}^{p} (\mathrm{C}_{k+1}^{n+1} - \mathrm{C}_k^{n+1}) \\ &= 1 + \sum_{k=n+1}^{p} \mathrm{C}_{k+1}^{n+1} - \sum_{k=n+1}^{p} \mathrm{C}_k^{n+1} = 1 + \sum_{k=n+2}^{p+1} \mathrm{C}_k^{n+1} - \sum_{k=n+1}^{p} \mathrm{C}_k^{n+1} \\ &= 1 + \mathrm{C}_{p+1}^{n+1} - \mathrm{C}_{n+1}^{n+1} = \mathrm{C}_{p+1}^{n+1}\end{aligned}$$

- *Troisième méthode*

  Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties de $\{1, 2, \ldots, p+1\}$ qui ont $n+1$ éléments.

  On sait que le cardinal de l'ensemble $\mathcal{A}$ est C_{p+1}^{n+1}.

  Si X est un élément de $\mathcal{A}$, alors $\max(X) \in \{n+1, \ldots, p+1\}$.

  On note $\mathcal{A}_k$ le sous-ensemble de $\mathcal{A}$ formé des parties d'élément maximum $k+1$.

  L'ensemble $\mathcal{A}$ est la réunion disjointe des $\mathcal{A}_k$, pour $n \leq k \leq p$.

  Pour former un élément de $\mathcal{A}_k$, c'est-à-dire une partie X de $\{1, 2, \ldots, p+1\}$ ayant $n+1$ éléments et telle que $\max(X) = k+1$, il faut bien entendu choisir arbitrairement n éléments parmi $\{1, 2, \ldots, k\}$, ce qui peut se faire de C_k^n façons différentes.

  Ainsi $\operatorname{Card} \mathcal{A}_k = \mathrm{C}_k^n$ et de plus $\operatorname{Card} \mathcal{A} = \sum_{k=n}^{p} \operatorname{Card} \mathcal{A}_k$. On en déduit $\mathrm{C}_{p+1}^{n+1} = \sum_{k=n}^{p} \mathrm{C}_k^n$.