



Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soient n, p, q, r, s des entiers naturels, avec $p \leq r, q \leq s, n \leq r + s$.

Montrer que $\sum_{p+q=n} C_r^p C_s^q = C_{r+s}^n$.

En déduire la somme des carrés des coefficients du binôme.

EXERCICE 2 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soient n, p deux entiers naturels, avec $0 \leq p \leq n$.

Montrer que $C_n^0 C_n^p + C_n^1 C_{n-1}^{p-1} + \dots + C_n^p C_{n-p}^0 = 2^p C_n^p$.

EXERCICE 3 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

On se donne trois entiers n, p, q tels que $0 \leq q \leq p \leq n$.

Montrer que $\sum_{k=q}^{n-p+q} C_k^q C_{n-k}^{p-q} = C_{n+1}^{p+1}$.

EXERCICE 4 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Montrer que pour tout entier naturel n , $\sum_{k=0}^n C_{2n-k}^n 2^k = 2^{2n}$.



Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Utiliser les développements de $(1+x)^{r+s} = (1+x)^r(1+x)^s$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

Utiliser $C_n^k C_{n-k}^{p-k} = C_n^p C_p^k$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Considérer l'ensemble \mathcal{F} de toutes les applications croissantes f de $\{0, \dots, p\}$ dans $\{0, \dots, n\}$ et discuter suivant la valeur de $f(q)$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

Utiliser $2^k = \sum_{q=0}^k C_k^q$ et l'exercice précédent.

On sera aussi amené à utiliser $\sum_{q=n+1}^{2n+1} C_{2n+1}^q = \sum_{q=0}^n C_{2n+1}^q$.

Corrigés des exercices

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

On a le développement $(1+x)^{r+s} = \sum_{i=0}^{r+s} C_{r+s}^i x^i$. Le coefficient de x^n est C_{r+s}^n .

On peut aussi écrire : $(1+x)^{r+s} = (1+x)^r(1+x)^s = \left[\sum_{j=0}^r C_r^j x^j \right] \left[\sum_{k=0}^s C_s^k x^k \right]$.

Dans le développement de ce produit, le coefficient de x^n est : $\sum_{p+q=n} C_r^p C_s^q$.

Si on identifie avec le coefficient de x^n dans $(1+x)^{r+s}$, on obtient l'égalité demandée.

Dans ce résultat, on pose $r = s = n$.

On trouve alors : $C_{2n}^n = \sum_{p+q=n} C_n^p C_n^q = \sum_{p=0}^n C_n^p C_n^{n-p}$.

Or $C_n^p = C_n^{n-p}$. On en déduit finalement : $\sum_{p=0}^n (C_n^p)^2 = C_{2n}^n$.

Bien sûr ce dernier résultat s'obtient directement en identifiant les coefficients de x^n dans les développements de $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Pour tout entier k compris entre 0 et n , on a :

$$C_n^k C_{n-k}^{p-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(n-k)!}{(p-k)!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \frac{p!}{k!(p-k)!} = C_n^p C_p^k.$$

La somme demandée s'écrit donc : $\sum_{k=0}^p C_n^k C_{n-k}^{p-k} = \sum_{k=0}^p C_n^p C_p^k = C_n^p \sum_{k=0}^p C_p^k = C_n^p 2^p$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Il y a C_{n+1}^{p+1} manières différentes de choisir une application strictement croissante f de $\{0, \dots, p\}$ dans $\{0, \dots, n\}$, car f est déterminée de manière unique par l'ensemble des images $\{f(j), 0 \leq j \leq p\}$, c'est-à-dire par une partie à $p+1$ éléments dans un ensemble à $n+1$ éléments.

On peut également calculer le cardinal de \mathcal{F} en fixant la valeur $k = f(q)$.

- Il faut choisir $f(0), \dots, f(q-1)$ distincts dans $\{0, \dots, k-1\}$, ce qui exige $k \geq q$ et peut se faire de C_k^q manières différentes.
- Il faut poser $f(q) = k$.
- Il faut choisir les $p-q$ images distinctes $f(q+1), \dots, f(p)$ dans $\{k+1, \dots, n\}$ (ensemble à $n-k$ éléments), ce qui exige $n-k \geq p-q$ c'est-à-dire $k \leq n-p+q$ et peut se faire de C_{n-k}^{p-q} manières différentes.

En considérant toutes les valeurs possibles de $k = f(q)$ (de $k = q$ à $k = n-p+q$) on voit que

le cardinal de \mathcal{F} est égal à la somme $\sum_{k=q}^{n-p+q} C_k^q C_{n-k}^{p-q}$, ce qui établit le résultat demandé.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4 [[Retour à l'énoncé](#)]

L'indication suggère de s'orienter vers une somme de produits de coefficients binomiaux.

La seule manière de le faire est d'utiliser $2^k = \sum_{q=0}^k C_k^q$.

On écrit donc : $\sum_{k=0}^n C_{2n-k}^n 2^k = \sum_{k=0}^n C_{2n-k}^n \left[\sum_{q=0}^k C_k^q \right] = \sum_{k=0}^n \sum_{q=0}^k C_{2n-k}^n C_k^q$

L'interversion des deux sommes donne $\sum_{k=0}^n C_{2n-k}^n 2^k = \sum_{q=0}^n \sum_{k=q}^n C_k^q C_{2n-k}^n$

En adaptant les notations, avec $N = 2n$ et $p = n + q$, l'exercice précédent donne :

$$\sum_{k=q}^n C_k^q C_{2n-k}^n = \sum_{k=q}^{N-p+q} C_k^q C_{N-k}^{p-q} = C_{N+1}^{p+1} = C_{2n+1}^{n+q+1}.$$

$$\text{Ainsi } \sum_{k=0}^n C_{2n-k}^n 2^k = \sum_{q=0}^n C_{2n+1}^{n+q+1} = \sum_{q=n+1}^{2n+1} C_{2n+1}^q.$$

Or $C_{2n+1}^q = C_{2n+1}^{2n+1-q}$ et si q parcourt $\{n+1, \dots, 2n+1\}$, $2n+1-q$ parcourt $\{0, \dots, n\}$.

$$\text{On peut donc écrire } \sum_{q=n+1}^{2n+1} C_{2n+1}^q = \sum_{q=n+1}^{2n+1} C_{2n+1}^{2n+1-q} = \sum_{q=0}^n C_{2n+1}^q.$$

En prenant la demi-somme des deux résultats obtenus, on trouve :

$$\sum_{k=0}^n C_{2n-k}^n 2^k = \frac{1}{2} \left[\sum_{q=0}^n C_{2n+1}^q + \sum_{q=n+1}^{2n+1} C_{2n+1}^q \right] = \frac{1}{2} \sum_{q=0}^{2n+1} C_{2n+1}^q = \frac{1}{2} 2^{2n+1} = 2^{2n}.$$