Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soient n, p, q, r, s des entiers naturels, avec $p \leq r$, $q \leq s$, $n \leq r+s$.
Montrer que $\sum_{p+q=n} \mathrm{C}_r^p \mathrm{C}_s^q = \mathrm{C}_{r+s}^n$.
En déduire la somme des carrés des coefficients du binôme.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soient n, p deux entiers naturels, avec $0 \leq p \leq n$.
Montrer que $\mathrm{C}_n^0 \mathrm{C}_n^p + \mathrm{C}_n^1 \mathrm{C}_{n-1}^{p-1} + \cdots + \mathrm{C}_n^p \mathrm{C}_{n-p}^0 = 2^p \mathrm{C}_n^p$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

On se donne trois entiers n, p, q tels que $0 \leq q \leq p \leq n$.
Montrer que $\sum_{k=q}^{n-p+q} \mathrm{C}_k^q \mathrm{C}_{n-k}^{p-q} = \mathrm{C}_{n+1}^{p+1}$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Montrer que pour tout entier naturel n, $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_{2n-k}^n 2^k = 2^{2n}$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Utiliser les développements de $(1+x)^{r+s} = (1+x)^r(1+x)^s$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Utiliser $\mathrm{C}_n^k \mathrm{C}_{n-k}^{p-k} = \mathrm{C}_n^p \mathrm{C}_p^k$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Considérer l'ensemble $\mathcal{F}$ de toutes les applications croissantes f de $\{0,\dots,p\}$ dans $\{0,\dots,n\}$ et discuter suivant la valeur de $f(q)$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Utiliser $2^k = \sum_{q=0}^{k} \mathrm{C}_k^q$ et l'exercice précédent.

On sera aussi amené à utiliser $\sum_{q=n+1}^{2n+1} \mathrm{C}_{2n+1}^q = \sum_{q=0}^{n} \mathrm{C}_{2n+1}^q$.

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

On a le développement $(1+x)^{r+s} = \sum_{i=0}^{r+s} \mathrm{C}_{r+s}^{i}\, x^i$. Le coefficient de x^n est C_{r+s}^{n}.

On peut aussi écrire : $(1+x)^{r+s} = (1+x)^r(1+x)^s = \left[\sum_{j=0}^{r} \mathrm{C}_r^j\, x^j\right]\left[\sum_{k=0}^{s} \mathrm{C}_s^k\, x^k\right]$.

Dans le développement de ce produit, le coefficient de x^n est : $\sum_{p+q=n} \mathrm{C}_r^p\, \mathrm{C}_s^q$.

Si on identitie avec le coefficient de x^n dans $(1+x)^{r+s}$, on obtient l 'égalité demandée.

Dans ce résultat, on pose $r = s = n$.

On trouve alors : $\mathrm{C}_{2n}^{n} = \sum_{p+q=n} \mathrm{C}_n^p\, \mathrm{C}_n^q = \sum_{p=0}^{n} \mathrm{C}_n^p\, \mathrm{C}_n^{n-p}$.

Or $\mathrm{C}_n^p = \mathrm{C}_n^{n-p}$. On en déduit finalement : $\sum_{p=0}^{n} (\mathrm{C}_n^p)^2 = \mathrm{C}_{2n}^{n}$.

Bien sûr ce dernier résultat s'obtient directement en identifiant les coefficients de x^n dans les développements de $(1+x)^{2n} = (1+x)^n(1+x)^n$.

Corrigé de l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Pour tout entier k compris entre 0 et n, on a :

$$\mathrm{C}_n^k\, \mathrm{C}_{n-k}^{p-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\,\frac{(n-k)!}{(p-k)!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}\,\frac{p!}{k!(p-k)!} = \mathrm{C}_n^p\, \mathrm{C}_p^k.$$

La somme demandée s'écrit donc : $\sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_n^k\, \mathrm{C}_{n-k}^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_n^p\, \mathrm{C}_p^k = \mathrm{C}_n^p \sum_{k=0}^{p} \mathrm{C}_p^k = \mathrm{C}_n^p\, 2^p$.

Corrigé de l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Il y a C_{n+1}^{p+1} manières différentes de choisir une application strictement croissante f de $\{0,\dots,p\}$ dans $\{0,\dots,n\}$, car f est déterminée de manière unique par l'ensemble des images $\{f(j), 0 \leq j \leq p\}$, c'est-à-dire par une partie à $p+1$ éléments dans un ensemble à $n+1$ éléments.

On peut également calculer le cardinal de $\mathcal{F}$ en fixant la valeur $k = f(q)$.

- Il faut choisir $f(0),\dots,f(q-1)$ distincts dans $\{0,\dots,k-1\}$, ce qui exige $k \geq q$ et peut se faire de C_k^q manières différentes.
- Il faut poser $f(q) = k$.
- Il faut choisir les $p-q$ images distinctes $f(q+1),\dots,f(p)$ dans $\{k+1,\dots,n\}$ (ensemble à $n-k$ éléments), ce qui exige $n-k \geq p-q$ c'est-à-dire $k \leq n-p+q$ et peut se faire de C_{n-k}^{p-q} manières différentes.

En considérant toutes les valeurs possibles de $k = f(q)$ (de $k = q$ à $k = n-p+q$) on voit que le cardinal de $\mathcal{F}$ est égal à la somme $\sum_{k=q}^{n-p+q} \mathrm{C}_k^q\, \mathrm{C}_{n-k}^{p-q}$, ce qui établit le résultat demandé.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Corrigé de l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

L'indication suggère de s'orienter vers une somme de produits de coefficients binomiaux.

La seule manière de le faire est d'utiliser $2^k = \sum_{q=0}^{k} \mathrm{C}_k^q$.

On écrit donc : $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_{2n-k}^n 2^k = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_{2n-k}^n \left[\sum_{q=0}^{k} \mathrm{C}_k^q\right] = \sum_{k=0}^{n}\sum_{q=0}^{k} \mathrm{C}_{2n-k}^n \mathrm{C}_k^q$

L'interversion des deux sommes donne $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_{2n-k}^n 2^k = \sum_{q=0}^{n}\sum_{k=q}^{n} \mathrm{C}_k^q \mathrm{C}_{2n-k}^n$

En adaptant les notations, avec $N = 2n$ et $p = n+q$, l'exercice précédent donne :

$$\sum_{k=q}^{n} \mathrm{C}_k^q \mathrm{C}_{2n-k}^n = \sum_{k=q}^{N-p+q} \mathrm{C}_k^q \mathrm{C}_{N-k}^{p-q} = \mathrm{C}_{N+1}^{p+1} = \mathrm{C}_{2n+1}^{n+q+1}.$$

Ainsi $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_{2n-k}^n 2^k = \sum_{q=0}^{n} \mathrm{C}_{2n+1}^{n+q+1} = \sum_{q=n+1}^{2n+1} \mathrm{C}_{2n+1}^q$.

Or $\mathrm{C}_{2n+1}^q = \mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1-q}$ et si q parcourt $\{n+1,\dots,2n+1\}$, $2n+1-q$ parcourt $\{0,\dots,n\}$.

On peut donc écrire $\sum_{q=n+1}^{2n+1} \mathrm{C}_{2n+1}^q = \sum_{q=n+1}^{2n+1} \mathrm{C}_{2n+1}^{2n+1-q} = \sum_{q=0}^{n} \mathrm{C}_{2n+1}^q$.

En prenant la demi-somme des deux résultats obtenus, on trouve :

$$\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_{2n-k}^n 2^k = \frac{1}{2}\left[\sum_{q=0}^{n} \mathrm{C}_{2n+1}^q + \sum_{q=n+1}^{2n+1} \mathrm{C}_{2n+1}^q\right] = \frac{1}{2}\sum_{q=0}^{2n+1} \mathrm{C}_{2n+1}^q = \frac{1}{2}\,2^{2n+1} = 2^{2n}.$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021