Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Combien y-a-t-il de surjections de E vers F si $\text{card}(E) = n+1$ et $\text{card}(F) = n$?
Même question avec $\text{card}(E) = n+2$ et avec $\text{card}(E) = n+3$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Soit E_p un ensemble de cardinal p.
Soit $\mathcal{F}_{p,n}$ l'ensemble des applications $f : E_p \to \mathbb{N}$ telles que $\sum_{x\in E} f(x) \leq n$.
Montrer que le cardinal de $\mathcal{F}_{p,n}$ est C_{n+p}^{p}. On donnera deux démonstrations.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soit E un ensemble à n éléments. Déterminer le nombre :

1. De relations sur E.
2. De relations réflexives sur E.
3. De relations symétriques sur E.
4. De relations réflexives et symétriques sur E.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Pour tout entier $m \geq 1$, on note $E_m = \{1, \dots, m\}$.

1. Le nombre de surjections de E_{n+1} dans E_n est $n\mathrm{C}_{n+1}^2 (n-1)! = \dfrac{n}{2}(n+1)!$
2. Le nombre de surjections de E_{n+2} sur E_n est $\dfrac{n(3n+1)}{24}(n+2)!$
3. Le nombre de surjections de E_{n+3} sur E_n est $\dfrac{n^2(n+1)}{48}(n+3)!$

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

– *Première méthode*

Par récurrence sur p. On vérifie que la propriété est vraie si $p = 1$.

Soit $p \geq 2$. On suppose que la propriété est vraie pour tout k de $\{0, \dots, p-1\}$ (et tout n).

Soit f une application de E_{p+1} dans $\mathbb{N}$.

Dire que f est dans $\mathcal{F}_{p+1,n}$ c'est écrire que $f(1) + f(2) + \cdots + f(p) \leq n - f(p+1)$.

On discute suivant la valeur de $k = n - f(p+1)\dots$

– *Deuxième méthode*

A toute application $f : E_p \to \mathbb{N}$ on associe l'application $g : E_p \to \mathbb{N}^*$ définie par :

$\forall k \in \{1, \dots, p\}, g(k) = f(1) + f(2) + \cdots + f(k) + k$.

On vérifie que g est strictement croissante et que la correspondance $f \mapsto g$ est biunivoque.

Il suffit donc de compter le nombre d'applications strictement croissantes de $E_p \to E_{n+p}$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

1. Le nombre de relations sur E est 2^{n^2}.
2. Il y a 2^{n^2-n} relations réflexives sur E.
3. Il y a $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$ relations symétriques sur E.
4. Il y a $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ relations réflexives et symétriques sur E.

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Dans tout cet exercice, et pour tout entier $m \geq 1$, on note $E_m = \{1, \dots, m\}$.

1. Pour construire une surjection f de E_{n+1} vers E_n, il faut :
   - Choisir l'élément y de E_n qui va posséder deux antécédents.
   - Choisir la paire $\{a, b\}$ des antécédents de y dans E_{n+1}.
   - Etablir une bijection entre les $n-1$ éléments de $E_{n+1} \setminus \{a, b\}$ et ceux de $E_n \setminus \{y\}$.

   Le nombre de surjections de E_{n+1} dans E_n est donc : $n\mathrm{C}_{n+1}^2 (n-1)! = \dfrac{n}{2}(n+1)!$
2. Soit f une surjection de E_{n+2} sur E_n.

   Deux cas sont possibles qui s'excluent mutuellement.
   - *Premier cas* :

     Il existe un élément y de E_n qui possède 3 antécédents distincts a, b, c.

     Il y a n manières de choisir y, puis C_{n+2}^3 manières de choisir $\{a, b, c\}$.

     Il y a ensuite $(n-1)!$ bijections de $E_{n+2} \setminus \{a, b, c\}$ sur $E_n \setminus \{y\}$.

     Le nombre de solutions dans ce premier cas est donc : $n\mathrm{C}_{n+2}^3 (n-1)! = \dfrac{n}{6}(n+2)!$.
   - *Deuxième cas* :

     Il existe deux éléments distincts y, z de E_n, ayant chacun deux antécédents.

     Supposons par exemple $y < z$ pour éviter de compter une même solution deux fois.

     Il y a C_n^2 manières de choisir le couple (y, z).

     Il y a ensuite C_{n+2}^2 manières de choisir les deux antécédents a, b de y.

     Puis il y a C_n^2 manières de choisir les deux antécédents c, d de z, dans $E_{n+2} \setminus \{a, b\}$.

     Il y a enfin $(n-2)!$ bijections entre $E_{n+2} \setminus \{a, b, c, d\}$ et $E_n \setminus \{y, z\}$.

     Le second cas donne donc $\mathrm{C}_n^2 \mathrm{C}_{n+2}^2 \mathrm{C}_n^2 (n-2)! = \dfrac{n(n-1)}{8}(n+2)!$ solutions.
   - Finalement, le nombre de surjections de E_{n+2} sur E_n est :

     $$\begin{aligned} \frac{n}{6}(n+2)! + \frac{n(n-1)}{8}(n+2)! &= \frac{(n+2)!}{24}(3n(n-1)+4n) \\ &= \frac{n(3n+1)}{24}(n+2)! \end{aligned}.$$
3. Soit f une surjection de E_{n+3} sur E_n.

   Trois cas sont possibles qui s'excluent mutuellement.
   - *Premier cas* :

     Il existe un élément y de E_n ayant quatre antécédents distincts.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

On choisit y, puis ses quatre antécédents, puis on met en bijection les $n-1$ éléments restant de part et d'autre. Il y a : $n\mathrm{C}_{n+3}^{4}(n-1)! = n\dfrac{(n+3)!}{4!}$ possibilités distinctes.

– *Deuxième cas* :

Il existe un élément y ayant trois antécédents et un autre élément z ayant deux antécédents.

Il faut choisir y, puis ses trois antécédents parmi $n+3$, puis z dans $E_n - \{y\}$ puis les deux antécédents de z parmi les n éléments encore disponibles.

Il reste enfin à mettre en bijection les $n-2$ éléments restant de part et d'autre.

Le nombre de possibilités distinctes est

$$n(n-1)\mathrm{C}_{n+3}^{3}\mathrm{C}_{n}^{2}(n-2)! = \frac{n(n-1)}{12}(n+3)!$$

– *Troisième cas* :

Il existe trois éléments y, z, t de E_n ayant chacun deux antécédents.

Supposons $y < z < t$ pour éviter de compter plusieurs fois une même solution.

Il y a C_{n}^{3} manières de choisir $\{y, z, t\}$ dans E_n.

Il faut ensuite choisir les deux antécédents de y parmi $n+3$, puis ceux de z parmi $n+1$ puis ceux de t parmi $n-1$, avant de mettre en bijection les $n-3$ éléments restant de part et d'autre.

Le nombre de possibilités distinctes est :

$$\mathrm{C}_{n}^{3}\mathrm{C}_{n+3}^{2}\mathrm{C}_{n+1}^{2}\mathrm{C}_{n-1}^{2}(n-3)! = \frac{n(n-1)(n-2)}{48}(n+3)!$$

– Finalement, le nombre de surjections de E_{n+3} sur E_n est :

$$n\left(\frac{1}{24} + \frac{n-1}{12} + \frac{(n-1)(n-2)}{48}\right)(n+3)! = \frac{n^2(n+1)}{48}(n+3)!$$

– Il faut avoir la présence d'esprit de vérifier pour des valeurs simples de n.

Par exemple, avec $n = 1$ on trouve une seule solution (il n'y a qu'une application de E_4 dans E_1 et elle est surjective.)

Pour $n = 2$, on trouve la valeur 30 : il y a en effet $2^5 = 32$ applications de E_5 dans E_2, et il faut éliminer les deux applications constantes qui sont les seules à ne pas être surjectives.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Corrigé de l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Pour simplifier les notations, on note $E_p = \{1, \dots, p\}$.

$\mathcal{F}_{p,n}$ est l'ensemble des $f : E_p \to \mathbb{N}$ telles que $f(1) + f(2) + \cdots + f(p) \leq n$.

Notons $\lambda_{p,n}$ le cardinal de $\mathcal{F}_{p,n}$.

L'énoncé demande donc de prouver que : $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, \lambda_{p,n} = \mathrm{C}_{n+p}^{p}$.

– *Première méthode*

On prouve le résultat par récurrence sur p. La propriété est vraie si $p = 1$ car $\lambda_{1,n} = n + 1$ (les solutions sont les applications définies en 1 par $f(1) = k$, avec $0 \leq k \leq n$).

Soit p un entier ≥ 2. On suppose que la propriété est vraie pour tous les entiers k de $\{0, \dots, p-1\}$ (et pour tous les entiers n).

Soit f une application de E_{p+1} dans $\mathbb{N}$.

Dire que f est dans $\mathcal{F}_{p+1,n}$ c'est écrire que $f(1) + f(2) + \cdots + f(p) \leq n - f(p+1)$.

On discute suivant la valeur de $k = n - f(p+1)$, qui est quelconque dans $\{0, \dots, n\}$.

On constate donc que $\lambda_{p+1,n} = \sum_{k=0}^{n} \lambda_{p,k}$.

Compte tenu de l'hypothèse de récurrence, on trouve :

$$\begin{aligned}\lambda_{p+1,n} &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_{k+p}^{p} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_{k+p}^{p} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\mathrm{C}_{k+p+1}^{p+1} - \mathrm{C}_{k+p}^{p+1}\right) \\ &= 1 + \sum_{k=2}^{n+1} \mathrm{C}_{k+p}^{p+1} - \sum_{k=1}^{n} \mathrm{C}_{k+p}^{p+1} = 1 + \mathrm{C}_{n+p+1}^{p+1} - \mathrm{C}_{p+1}^{p+1} = \mathrm{C}_{n+p+1}^{p+1}\end{aligned}$$

Ce qui démontre la propriété au rang $p + 1$ et achève la récurrence.

– *Deuxième méthode*

A toute application $f : E_p \to \mathbb{N}$ on associe l'application $g : E_p \to \mathbb{N}^*$ définie par :

$\forall k \in \{1, \dots, p\}, g(k) = f(1) + f(2) + \cdots + f(k) + k$: g est strictement croissante.

En effet : $\forall k \in \{2, \dots, p\}, g(k) - g(k-1) = f(k) + 1 > 0$.

Réciproquement, soit g une application strictement croissante de E_p dans $\mathbb{N}^*$.

Alors g est l'image (au sens de la correspondance précédente) d'une unique application f de E_p dans $\mathbb{N}$, et cette application est définie par :

$f(1) = g(1) - 1$ et $\forall k \in \{2, \dots, p\},\ f(k) = g(k) - g(k-1) - 1$.

Par construction on a bien sûr $g(p) = f(1) + f(2) + \ldots + f(p) + p$.

La condition $f(1) + f(2) + \ldots + f(p) \leq n$ équivaut donc à $g(p) \leq n + p$.

Cette correspondance bijective montre donc qu'il y a autant d'éléments dans $\mathcal{F}_{p,n}$ qu'il y a d'applications strictement croissantes de E_p dans E_{n+p}.

Or une application strictement croissante de E_p dans E_{n+p} est déterminée de manière unique par son ensemble image, c'est-à-dire par une partie quelconque à p éléments de E_{n+p}. Il y a donc C_{n+p}^{p} solutions distinctes, ce qui achève la démonstration.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Corrigé de l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

1. Une relation sur E est une partie de $E \times E$, et $\text{Card}\,(E \times E) = n^2$.

   Le nombre de relations sur E est donc 2^{n^2}.

2. On note $\Delta = \{(x, x), x \in E\}$ la "diagonale" de $E \times E$.

   Une relation réflexive sur E est une partie de $E \times E$ qui contient Δ.

   Choisir une telle relation, c'est en fait choisir une partie de $(E \times E) \setminus \Delta$, et cet ensemble est de cardinal $n^2 - n$.

   Il y a donc 2^{n^2-n} relations réflexives sur E.

3. Posons $E = \{1, 2, \ldots, n\}$ pour fixer les idées. Une relation symétrique sur E est une partie G de $E \times E$ telle que : $(x, y) \in G \Leftrightarrow (y, x) \in G$.

   La partie G est déterminée par son intersection avec $\Delta^+ = \{(x, y) \in E \times E, x \leq y\}$ dont le cardinal est $\dfrac{1}{2}n(n+1)$.

   Il y a donc $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$ relations symétriques sur E.

4. Une relation réflexive et symétrique sur E est entièrement déterminée par son intersection avec $\Delta^{++} = \{(x, y) \in E \times E, x < y\}$ dont le cardinal est $\dfrac{1}{2}n(n-1)$.

   Il y a donc $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ relations réflexives et symétriques sur E.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021