



Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Combien y-a-t-il de surjections de E vers F si $\text{card}(E) = n + 1$ et $\text{card}(F) = n$?

Même question avec $\text{card}(E) = n + 2$ et avec $\text{card}(E) = n + 3$.

EXERCICE 2 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit E_p un ensemble de cardinal p .

Soit $\mathcal{F}_{p,n}$ l'ensemble des applications $f : E_p \rightarrow \mathbb{N}$ telles que $\sum_{x \in E} f(x) \leq n$.

Montrer que le cardinal de $\mathcal{F}_{p,n}$ est C_{n+p}^p . On donnera deux démonstrations.

EXERCICE 3 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soit E un ensemble à n éléments. Déterminer le nombre :

1. De relations sur E .
2. De relations réflexives sur E .
3. De relations symétriques sur E .
4. De relations réflexives et symétriques sur E .

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Pour tout entier $m \geq 1$, on note $E_m = \{1, \dots, m\}$.

1. Le nombre de surjections de E_{n+1} dans E_n est $nC_{n+1}^2 (n-1)! = \frac{n}{2}(n+1)!$
2. Le nombre de surjections de E_{n+2} sur E_n est $\frac{n(3n+1)}{24}(n+2)!$
3. Le nombre de surjections de E_{n+3} sur E_n est $\frac{n^2(n+1)}{48}(n+3)!$

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

– *Première méthode*

Par récurrence sur p . On vérifie que la propriété est vraie si $p = 1$.

Soit $p \geq 2$. On suppose que la propriété est vraie pour tout k de $\{0, \dots, p-1\}$ (et tout n).

Soit f une application de E_{p+1} dans \mathbb{N} .

Dire que f est dans $\mathcal{F}_{p+1,n}$ c'est écrire que $f(1) + f(2) + \dots + f(p) \leq n - f(p+1)$.

On discute suivant la valeur de $k = n - f(p+1) \dots$

– *Deuxième méthode*

A toute application $f : E_p \rightarrow \mathbb{N}$ on associe l'application $g : E_p \rightarrow \mathbb{N}^*$ définie par :

$$\forall k \in \{1, \dots, p\}, g(k) = f(1) + f(2) + \dots + f(k) + k.$$

On vérifie que g est strictement croissante et que la correspondance $f \mapsto g$ est biunivoque.

Il suffit donc de compter le nombre d'applications strictement croissantes de $E_p \rightarrow E_{n+p}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

1. Le nombre de relations sur E est 2^{n^2} .
2. Il y a 2^{n^2-n} relations réflexives sur E .
3. Il y a $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$ relations symétriques sur E .
4. Il y a $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ relations réflexives et symétriques sur E .

Corrigés des exercices

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Dans tout cet exercice, et pour tout entier $m \geq 1$, on note $E_m = \{1, \dots, m\}$.

1. Pour construire une surjection f de E_{n+1} vers E_n , il faut :

- Choisir l'élément y de E_n qui va posséder deux antécédents.
- Choisir la paire $\{a, b\}$ des antécédents de y dans E_{n+1} .
- Etablir une bijection entre les $n - 1$ éléments de $E_{n+1} \setminus \{a, b\}$ et ceux de $E_n \setminus \{y\}$.

Le nombre de surjections de E_{n+1} dans E_n est donc : $nC_{n+1}^2 (n - 1)! = \frac{n}{2}(n + 1)!$

2. Soit f une surjection de E_{n+2} sur E_n .

Deux cas sont possibles qui s'excluent mutuellement.

– *Premier cas :*

Il existe un élément y de E_n qui possède 3 antécédents distincts a, b, c .

Il y a n manières de choisir y , puis C_{n+2}^3 manières de choisir $\{a, b, c\}$.

Il y a ensuite $(n - 1)!$ bijections de $E_{n+2} \setminus \{a, b, c\}$ sur $E_n \setminus \{y\}$.

Le nombre de solutions dans ce premier cas est donc : $nC_{n+2}^3 (n - 1)! = \frac{n}{6}(n + 2)!$

– *Deuxième cas :*

Il existe deux éléments distincts y, z de E_n , ayant chacun deux antécédents.

Supposons par exemple $y < z$ pour éviter de compter une même solution deux fois.

Il y a C_n^2 manières de choisir le couple (y, z) .

Il y a ensuite C_{n+2}^2 manières de choisir les deux antécédents a, b de y .

Puis il y a C_n^2 manières de choisir les deux antécédents c, d de z , dans $E_{n+2} \setminus \{a, b\}$.

Il y a enfin $(n - 2)!$ bijections entre $E_{n+2} \setminus \{a, b, c, d\}$ et $E_n \setminus \{y, z\}$.

Le second cas donne donc $C_n^2 C_{n+2}^2 C_n^2 (n - 2)! = \frac{n(n - 1)}{8} (n + 2)!$ solutions.

– Finalement, le nombre de surjections de E_{n+2} sur E_n est :

$$\begin{aligned} \frac{n}{6}(n + 2)! + \frac{n(n - 1)}{8}(n + 2)! &= \frac{(n + 2)!}{24}(3n(n - 1) + 4n) \\ &= \frac{n(3n + 1)}{24}(n + 2)! \end{aligned}$$

3. Soit f une surjection de E_{n+3} sur E_n .

Trois cas sont possibles qui s'excluent mutuellement.

– *Premier cas :*

Il existe un élément y de E_n ayant quatre antécédents distincts.

On choisit y , puis ses quatre antécédents, puis on met en bijection les $n - 1$ éléments restant de part et d'autre. Il y a : $n C_{n+3}^4 (n - 1)! = n \frac{(n + 3)!}{4!}$ possibilités distinctes.

– *Deuxième cas :*

Il existe un élément y ayant trois antécédents et un autre élément z ayant deux antécédents.

Il faut choisir y , puis ses trois antécédents parmi $n + 3$, puis z dans $E_n - \{y\}$ puis les deux antécédents de z parmi les n éléments encore disponibles.

Il reste enfin à mettre en bijection les $n - 2$ éléments restant de part et d'autre.

Le nombre de possibilités distinctes est

$$n(n - 1) C_{n+3}^3 C_n^2 (n - 2)! = \frac{n(n - 1)}{12} (n + 3)!$$

– *Troisième cas :*

Il existe trois éléments y, z, t de E_n ayant chacun deux antécédents.

Supposons $y < z < t$ pour éviter de compter plusieurs fois une même solution.

Il y a C_n^3 manières de choisir $\{y, z, t\}$ dans E_n .

Il faut ensuite choisir les deux antécédents de y parmi $n + 3$, puis ceux de z parmi $n + 1$ puis ceux de t parmi $n - 1$, avant de mettre en bijection les $n - 3$ éléments restant de part et d'autre.

Le nombre de possibilités distinctes est :

$$C_n^3 C_{n+3}^2 C_{n+1}^2 C_{n-1}^2 (n - 3)! = \frac{n(n - 1)(n - 2)}{48} (n + 3)!$$

– Finalement, le nombre de surjections de E_{n+3} sur E_n est :

$$n \left(\frac{1}{24} + \frac{n - 1}{12} + \frac{(n - 1)(n - 2)}{48} \right) (n + 3)! = \frac{n^2(n + 1)}{48} (n + 3)!$$

– Il faut avoir la présence d'esprit de vérifier pour des valeurs simples de n .

Par exemple, avec $n = 1$ on trouve une seule solution (il n'y a qu'une application de E_4 dans E_1 et elle est surjective.)

Pour $n = 2$, on trouve la valeur 30 : il y a en effet $2^5 = 32$ applications de E_5 dans E_2 , et il faut éliminer les deux applications constantes qui sont les seules à ne pas être surjectives.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

Pour simplifier les notations, on note $E_p = \{1, \dots, p\}$.

$\mathcal{F}_{p,n}$ est l'ensemble des $f : E_p \rightarrow \mathbb{N}$ telles que $f(1) + f(2) + \dots + f(p) \leq n$.

Notons $\lambda_{p,n}$ le cardinal de $\mathcal{F}_{p,n}$.

L'énoncé demande donc de prouver que : $\forall p \in \mathbb{N}^*, \forall n \in \mathbb{N}, \lambda_{p,n} = C_{n+p}^p$.

– *Première méthode*

On prouve le résultat par récurrence sur p . La propriété est vraie si $p = 1$ car $\lambda_{1,n} = n + 1$ (les solutions sont les applications définies en 1 par $f(1) = k$, avec $0 \leq k \leq n$).

Soit p un entier ≥ 2 . On suppose que la propriété est vraie pour tous les entiers k de $\{0, \dots, p-1\}$ (et pour tous les entiers n).

Soit f une application de E_{p+1} dans \mathbb{N} .

Dire que f est dans $\mathcal{F}_{p+1,n}$ c'est écrire que $f(1) + f(2) + \dots + f(p) \leq n - f(p+1)$.

On discute suivant la valeur de $k = n - f(p+1)$, qui est quelconque dans $\{0, \dots, n\}$.

On constate donc que $\lambda_{p+1,n} = \sum_{k=0}^n \lambda_{p,k}$.

Compte tenu de l'hypothèse de récurrence, on trouve :

$$\begin{aligned} \lambda_{p+1,n} &= \sum_{k=0}^n C_{k+p}^p = 1 + \sum_{k=1}^n C_{k+p}^p = 1 + \sum_{k=1}^n (C_{k+p+1}^{p+1} - C_{k+p}^{p+1}) \\ &= 1 + \sum_{k=2}^{n+1} C_{k+p}^{p+1} - \sum_{k=1}^n C_{k+p}^{p+1} = 1 + C_{n+p+1}^{p+1} - C_{p+1}^{p+1} = C_{n+p+1}^{p+1} \end{aligned}$$

Ce qui démontre la propriété au rang $p+1$ et achève la récurrence.

– *Deuxième méthode*

A toute application $f : E_p \rightarrow \mathbb{N}$ on associe l'application $g : E_p \rightarrow \mathbb{N}^*$ définie par :

$\forall k \in \{1, \dots, p\}, g(k) = f(1) + f(2) + \dots + f(k) + k$: g est strictement croissante.

En effet : $\forall k \in \{2, \dots, p\}, g(k) - g(k-1) = f(k) + 1 > 0$.

Réciproquement, soit g une application strictement croissante de E_p dans \mathbb{N}^* .

Alors g est l'image (au sens de la correspondance précédente) d'une unique application f de E_p dans \mathbb{N} , et cette application est définie par :

$f(1) = g(1) - 1$ et $\forall k \in \{2, \dots, p\}, f(k) = g(k) - g(k-1) - 1$.

Par construction on a bien sûr $g(p) = f(1) + f(2) + \dots + f(p) + p$.

La condition $f(1) + f(2) + \dots + f(p) \leq n$ équivaut donc à $g(p) \leq n + p$.

Cette correspondance bijective montre donc qu'il y a autant d'éléments dans $\mathcal{F}_{p,n}$ qu'il y a d'applications strictement croissantes de E_p dans E_{n+p} .

Or une application strictement croissante de E_p dans E_{n+p} est déterminée de manière unique par son ensemble image, c'est-à-dire par une partie quelconque à p éléments de E_{n+p} . Il y a donc C_{n+p}^p solutions distinctes, ce qui achève la démonstration.

**CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3** [[Retour à l'énoncé](#)]

1. Une relation sur E est une partie de $E \times E$, et $\text{Card}(E \times E) = n^2$.
Le nombre de relations sur E est donc 2^{n^2} .
2. On note $\Delta = \{(x, x), x \in E\}$ la “diagonale” de $E \times E$.
Une relation réflexive sur E est une partie de $E \times E$ qui contient Δ .
Choisir une telle relation, c'est en fait choisir une partie de $(E \times E) \setminus \Delta$, et cet ensemble est de cardinal $n^2 - n$.
Il y a donc 2^{n^2-n} relations réflexives sur E .
3. Posons $E = \{1, 2, \dots, n\}$ pour fixer les idées. Une relation symétrique sur E est une partie G de $E \times E$ telle que : $(x, y) \in G \Leftrightarrow (y, x) \in G$.
La partie G est déterminée par son intersection avec $\Delta^+ = \{(x, y) \in E \times E, x \leq y\}$ dont le cardinal est $\frac{1}{2}n(n+1)$.
Il y a donc $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$ relations symétriques sur E .
4. Une relation réflexive et symétrique sur E est entièrement déterminée par son intersection avec $\Delta^{++} = \{(x, y) \in E \times E, x < y\}$ dont le cardinal est $\frac{1}{2}n(n-1)$.
Il y a donc $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$ relations réflexives et symétriques sur E .