Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

On cherche une condition sur p, q pour que $A = X^3 + pX + q$ ait un zéro multiple.

On demande trois méthodes différentes...

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Déterminer λ pour que $P = X^3 - 3X + \lambda$ ait un zéro double.
Résoudre alors l'équation $P(x) = 0$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Déterminer λ pour que $P = X^3 - 8X^2 + (13 - \lambda)X - 6 - 2\lambda$ ait un zéro double.
Résoudre alors l'équation $P(x) = 0$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Déterminer m, n, p pour que $A = x^6 + mx^4 + 10x^3 + nx + p = 0$ ait une racine quadruple.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

1. A possède une racine multiple $\Leftrightarrow$ A et A' ont une racine commune.
   Cela équivaut à dire que $\deg(A \wedge A') \geq 1 \ldots$
2. A possède une racine multiple $\Leftrightarrow$ A et A' ont une racine commune.
   Or les racines de A' sont $\pm\omega$ avec $\omega^2 = -\dfrac{p}{3} \ldots$
3. Soient a, b, c les racines de A. On pose $\varphi = (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$.
   Par construction, A possède une racine multiple si et seulement si $\varphi = 0$.
   On exprime ensuite φ en fonction des coefficients de A.

Dans tous les cas, on arrive à la condition : $4p^3 + 27q^2 = 0$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Dire que P possède une racine au moins double, c'est dire que P et P' ont un zéro en commun.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Soient a, b, c les racines de P. On écrit les relations coefficients-racines, en ajoutant $a = c$.

Les valeurs de λ pour lesquelles P a une racine au moins double sont $0, -3, 125$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Si A possède une racine quadruple a, alors a annule A, A', A'', et $A^{(3)}$.

Montrer que a est racine quadruple si et seulement si $a^3 = 1, m = -\dfrac{15}{2}a^2, n = -6a^2, p = \dfrac{5}{2}$.

Discuter alors suivant les trois valeurs possibles de a.

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

1. *Première méthode*

   $A = X^3 + pX + q$ a une racine multiple $\Leftrightarrow$ A et $A' = 3X^2 + p$ ont une racine commune.

   Dire que A et A' ont une racine commune, c'est dire que $\deg(A \wedge A') \geq 1$.

   Or $3A = XA' + (2pX + 3q)$. Donc $A \wedge A' = A' \wedge (2pX + 3q)$.

   Remarquons que si $p = 0$ alors la condition est $q = 0$. On peut donc supposer $p \neq 0$.

   On obtient alors $4p^2 A' = (2pX + 3q)(6pX - 9q) + 4p^3 + 27q^2$.

   Ainsi $A \wedge A' = (2pX + 3q) \wedge (4p^3 + 27q^2)$.

   La condition sur le pgcd s'écrit ici $4p^3 + 27q^2 = 0$ (c'est compatible avec le cas $p = 0$.)

   Conclusion : $A = X^3 + pX + q$ a une racine multiple si et seulement si $4p^3 + 27q^2 = 0$.

2. *Deuxième méthode*

   $A = X^3 + pX + q$ a une racine multiple $\Leftrightarrow$ A et $A' = 3X^2 + p$ ont une racine commune.

   Mais A' possède deux racines ω et $-\omega$, avec $\omega^2 = -\dfrac{p}{3}$.

   On constate que $A(\omega) = \omega\omega^2 + p\omega + q = \dfrac{2p}{3}\omega + q$. De même, $A(-\omega) = \dfrac{-2p}{3}\omega + q$.

   Il reste à exprimer que $A(\omega) = 0$ ou $A(-\omega) = 0$, ce qui se résume à $A(\omega)A(-\omega) = 0$.

   Or $A(\omega)A(-\omega) = \left(\dfrac{2p}{3}\omega + q\right)\left(-\dfrac{2p}{3}\omega + q\right) = q^2 - \dfrac{4p^2}{9}\omega^2 = q^2 + \dfrac{4p^3}{27}$.

   Conclusion : $A = X^3 + pX + q$ a une racine multiple $\Leftrightarrow$ $4p^3 + 27q^2 = 0$.

3. *Troisième méthode*

   Soient a, b, c les racines de $A = X^3 + pX + q$. On pose $\varphi = (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$.

   φ est une fonction symétrique de a, b, c. On a $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = p$, $\sigma_3 = -q$.

   Par construction, A possède une racine multiple si et seulement si $\varphi = 0$.

   Il reste à exprimer φ en fonction des coefficients de A.

   On remarque que $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$. Or $a + b + c = 0$ et $abc = -q$.

   Il en découle (en supposant $c \neq 0$) que $(a-b)^2 = c^2 + 4\dfrac{q}{c} = \dfrac{c^3 + 4q}{c} = \dfrac{-pc + 3q}{c}$.

   Finalement, on trouve φ en fonction de p et q (en supposant $q = -abc \neq 0$) :

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{1}{abc}(-pa + 3q)(-pb + 3q)(-pc + 3q)\\ &= \frac{1}{\sigma_3}(-p^3\sigma_3 + 3qp^2\sigma_2 - 9q^2p\sigma_1 + 27q^3) = -(4p^3 + 27q^2)\end{aligned}$$

   Si $q = 0$, et par exemple si $a = 0$, alors $b + c = 0$ et $bc = p$.

   Dans ces conditions on a encore $\varphi = b^2c^2(b-c)^2 = p^2(-4bc) = -4p^3 = -(4p^3 + 27q^2)$.

   Conclusion : $A = X^3 + pX + q$ a une racine multiple $\Leftrightarrow$ $4p^3 + 27q^2 = 0$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Corrigé de l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Dire que P possède une racine au moins double, c'est dire que P et P' ont un zéro en commun.

Or les racines $P' = 3(X^2-1)$ sont -1 et 1.

D'autre part $P(-1) = \lambda + 2$ et $P(1) = \lambda - 2$.

La condition de l'énoncé équivaut donc à $\lambda \in \{-2, 2\}$.
- Si $\lambda = -2$ alors $P = X^3 - 3X - 2 = (X+1)^2(X-2)$, et $P(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 2\}$.
- Si $\lambda = 2$ alors $P = X^3 - 3X + 2 = (X-1)^2(X+2)$, et $P(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-2, 1\}$.

Corrigé de l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Soient a, b, c les racines de P. On écrit les relations coefficients-racines, en ajoutant la condition $a = c$. Il reste alors à trouver λ pour que ce système ait des solutions :

$$\begin{cases} a+b+c = 8 \\ ab+ac+bc = 13-\lambda \\ abc = 6+2\lambda \\ a = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+b = 8 \\ a^2+2ab = 13-\lambda \\ a^2b = 6+2\lambda \\ a = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 8-2a \\ a^2+2a(8-2a) = 13-\lambda \\ a^2(8-2a) = 6+2\lambda \\ c = a \end{cases}$$

Il reste donc à trouver λ pour que le système $\begin{cases} 3a^2-16a = \lambda - 13 \\ 2a^3-8a^2 = -6-2\lambda \end{cases}$ ait une solution a.

On remarque que $a = 0$ ne peut pas convenir. On peut donc opérer des réductions de degré en utilisant a comme pivot (les systèmes obtenus sont équivalents) :

$$\begin{cases} 3a^2-16a = \lambda-13 \\ 2a^3-8a^2 = -6-2\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2-16a = \lambda-13 \\ 4a^2+(\lambda-13)a = -9-3\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2-16a = \lambda-13 \\ (3\lambda+25)a = 25-13\lambda \end{cases}$$

Il reste à exprimer que $a = \dfrac{25-13\lambda}{3\lambda+25}$ est solution de $3a^2-16a = 13-\lambda$.

Cela équivaut à : $3(25-13\lambda)^2 - 16(25-13\lambda)(3\lambda+25) = (\lambda-13)(3\lambda+25)^2$.

Cela s'écrit $9(\lambda^3 - 122\lambda^2 - 375\lambda) = 0$ ou encore $\lambda(\lambda+3)(\lambda-125) = 0$.

Les valeurs de λ pour lesquelles P a une racine au moins double sont donc $0, -3, 125$.
- Si $\lambda = 0$, on trouve $a = c = \dfrac{25-13\lambda}{3\lambda+25} = 1$, puis $b = 8-2a = 6$.

  Effectivement $P = X^3 - 8X^2 + 13X - 6 = (X-1)^2(X-6)$.
- Si $\lambda = -3$, on trouve $a = c = \dfrac{25-13\lambda}{3\lambda+25} = 4$, puis $b = 8-2a = 0$.

  Effectivement $P = X^3 - 8X^2 + 16X = X(X-4)^2$.
- Si $\lambda = 125$, on trouve $a = c = \dfrac{25-13\lambda}{3\lambda+25} = -4$, puis $b = 8-2a = 16$.

  Effectivement $P = X^3 - 8X^2 - 112X - 256 = (X-16)(X+4)^2$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Corrigé de l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Si le polynôme A possède une racine quadruple a, alors a est une racine de $A, A', A'', A^{(3)}$.

Or $A''(x) = 6x(5x^3 + 2mx + 10)$ et $A^{(3)}(x) = 12(10x^3 + 2mx + 5)$.

La valeur $a = 0$ ne convient pas car $A^{(3)}(0) \neq 0$.

Ainsi a vérifie $\begin{cases} 5a^3 + 2ma + 10 = 0 \\ 10a^3 + 2ma + 5 = 0 \end{cases}$ qui équivaut à $\begin{cases} 2ma + 15 = 0 \\ a^3 = 1 \end{cases}$ donc à $\begin{cases} m = -\dfrac{15}{2}a^2 \\ a^3 = 1 \end{cases}$

Réciproquement, avec ces données,

$$\begin{cases} A(a) = a^6 + ma^4 + 10a^3 + na + p = 1 + ma + 10 + na + p = na + p + \dfrac{7}{2} \\ A'(a) = 6a^5 + 4ma^3 + 30a^2 + n = 36a^2 + 4m + n = 36a^2 - 30a^2 + n = 6a^2 + n \end{cases}$$

Le système $\begin{cases} A(a) = 0 \\ A'(a) = 0 \end{cases}$ est donc équivalent à $\begin{cases} n = -6a^2 \\ p = 6a^3 - \dfrac{7}{2} = \dfrac{5}{2} \end{cases}$

Conclusion : le polynôme A admet une racine quadruple a si et seulement si on a les conditions

$$a^3 = 1, \quad m = -\frac{15}{2}a^2, \quad n = -6a^2, \quad p = \frac{5}{2}$$

Il y a donc trois cas, suivant que $a = 1$, $a = j$ ou $a = j^2$.

On constate effectivement qu'avec la condition $a^3 = 1$, on a la factorisation :

$$\begin{aligned} x^6 - \frac{15}{2}a^2x^4 + 10x^3 - 6a^2x + \frac{5}{2} &= (x^4 - 4ax^3 + 6a^2x^2 - 4a^3x + a^4)\left(x^2 + 4ax + \frac{5}{2}a^2\right) \\ &= (x - a)^4\left(x^2 + 4ax + \frac{5}{2}a^2\right) \end{aligned}$$

– Dans le cas $a = 1$, on trouve $m = -\dfrac{15}{2}$, $n = -6$ et $p = \dfrac{5}{2}$.

On a effectivement : $A(x) = x^6 - \dfrac{15}{2}x^4 + 10x^3 - 6x + \dfrac{5}{2} = (x - 1)^4\left(x^2 + 4x + \dfrac{5}{2}\right)$.

– Dans le cas $a = j$, on trouve $m = -\dfrac{15}{2}j^2$, $n = -6j^2$ et $p = \dfrac{5}{2}$.

On a effectivement : $A(x) = x^6 - \dfrac{15}{2}j^2x^4 + 10x^3 - 6j^2x + \dfrac{5}{2} = (x - j)^4\left(x^2 + 4jx + \dfrac{5}{2}j^2\right)$.

– Dans le cas $a = j^2$, on trouve $m = -\dfrac{15}{2}j$, $n = -6j$ et $p = \dfrac{5}{2}$.

On a effectivement : $A(x) = x^6 - \dfrac{15}{2}jx^4 + 10x^3 - 6jx + \dfrac{5}{2} = (x - j^2)^4\left(x^2 + 4j^2x + \dfrac{5}{2}j\right)$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021