Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Calculer la dérivée n-ième de $f_n(x) = x^{n-1} \ln x$, avec $n \geq 1$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Calculer la dérivée n-ième de $f(x) = \sin(x \cos \alpha)\, \mathrm{e}^{x \sin \alpha}$.
On proposera deux démonstrations différentes.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

On pose $y(x) = \arctan x$. Montrer que $y^{(n)}(x) = (n-1)! \cos^n y \, \sin(ny + n\frac{\pi}{2})$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Calculer les zéros de la dérivée n-ième de $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Pour tout entier naturel n, établir que $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[(4x)^{n+1/2} \dfrac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}} \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\right] = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

On a $f_{n+1}(x) = xf_n(x)$. Montrer par récurrence que $f_n^{(n)}(x)$ s'écrit sous la forme $\dfrac{a_n}{x}$.

Vérifier que $a_{n+1} = na_n$ pour tout $n \geq 1$. En déduire $f_n^{(n)}(x) = \dfrac{(n-1)!}{x}$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

- Première méthode : remarquer que $f'(x) = \sin(\alpha + x\sin\alpha)\,\mathrm{e}^{x\cos\alpha}$.
  Prouver par récurrence que $f^{(n)}(x) = \sin(n\alpha + x\sin\alpha)\,\mathrm{e}^{x\cos\alpha}$.
- Deuxième méthode : remarquer que $f(x) = \operatorname{Im} g(x)$ avec $g(x) = \mathrm{e}^{\omega x}$ et $\omega = \mathrm{e}^{i\alpha}$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Procéder par récurrence sur $n \geq 1$, en remarquant d'abord que $y' = \cos^2 y$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Remarquer que $f(x) = \dfrac{1}{(x+i)(x-i)} = \dfrac{i}{2}\Big(\dfrac{1}{x+i} - \dfrac{1}{x-i}\Big)$.

En déduire $f^{(n)}(x) = \dfrac{i(-1)^n n!((x-i)^{n+1} - (x+i)^{n+1})}{2(x^2+1)^{n+1}}$.

Chercher ensuite les zéros du polynôme $P_n(x) = (x-i)^{n+1} - (x+i)^{n+1}$.

On trouve n solutions distinctes : les $x_k = -\operatorname{cotan}\theta_k$, avec avec $\theta_k = \dfrac{k\pi}{n+1}$ et $1 \leq k \leq n$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Poser $y = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$, $z_n = (4x)^{n+1/2}y^{(n+1)}$, puis établir $z_n^{(n)} = y$ par récurrence.

Pour celà, montrer que $4xy'' + 2y' - y = 0$, égalité qu'on dérivera n fois.

En déduire $z_1 + 2z_0 - 2y\sqrt{x} = 0$ et pour $n \geq 1$: $z_{n+1} + (4n+2)z_n - 4z_{n-1} = 0$.

Enfin, dériver $n+1$ fois l'égalité précédente.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

On vérifie que $f_1'(x) = (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ et $f_2''(x) = (x\ln x)'' = (1+\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 1$, il existe $a_n \in \mathbb{R}$ tel que $g_n(x) = f_n^{(n)}(x) = \dfrac{a_n}{x}$.

C'est vrai si $n = 1$. Supposons que ce le soit pour un entier $n \geq 1$ fixé. Alors :

$$\begin{aligned} g_{n+1}(x) &= f_{n+1}^{(n+1)}(x) = (xf_n(x))^{(n+1)}(x) = xf_n^{(n+1)}(x) + (n+1)f_n^{(n)}(x) \\ &= xg_n'(x) + (n+1)g_n(x) = -\frac{a_n}{x} + \frac{(n+1)a_n}{x} = \frac{na_n}{x} \end{aligned}$$

Ainsi il existe a_{n+1} tel que $g_{n+1}(x) = f_{n+1}^{(n+1)}(x) = \dfrac{a_{n+1}}{x}$, avec $a_{n+1} = na_n$.

Cela prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.

De plus la relation $a_{n+1} = na_n$ et l'égalité $a_1 = 1$ donnent $\forall\, n \geq 1,\ a_n = (n-1)!$

Conclusion : pour tout $n \geq 1$, on a $f_n^{(n)}(x) = \dfrac{(n-1)!}{x}$.

Corrigé de l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

On calcule la dérivée première de f :

$$f'(x) = ((\sin\alpha)\cos(x\sin\alpha) + (\cos\alpha)\sin(x\sin\alpha))\,\mathrm{e}^{x\cos\alpha} = \sin(\alpha + x\sin\alpha)\,\mathrm{e}^{x\cos\alpha}$$

Montrons que pour tout entier n, on a $f^{(n)}(x) = \sin(n\alpha + x\sin\alpha)\,\mathrm{e}^{x\cos\alpha}$.

La propriété est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.

Supposons qu'elle le soit pour un entier $n \geq 0$ donné.

On en déduit :

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sin(n\alpha + x\sin\alpha)\,\mathrm{e}^{x\cos\alpha}\right) \\ &= ((\sin\alpha)\cos(n\alpha + x\sin\alpha) + (\cos\alpha)\sin(n\alpha + x\sin\alpha))\,\mathrm{e}^{x\cos\alpha} \\ &= \sin((n+1)\alpha + x\sin\alpha)\,\mathrm{e}^{x\cos\alpha} \end{aligned}$$

ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.

Il y a une autre démonstration, qui utilise les fonctions à valeurs complexes.

On a en effet $f(x) = \operatorname{Im} g(x)$ avec $g(x) = \mathrm{e}^{ix\sin\alpha}\,\mathrm{e}^{x\cos\alpha} = \mathrm{e}^{\omega x}$ avec $\omega = \mathrm{e}^{i\alpha}$.

On a alors, pour tout n, $g^{(n)}(x) = \omega^n\,\mathrm{e}^{\omega x} = \mathrm{e}^{in\alpha}\,\mathrm{e}^{\omega x} = \exp(i(n\alpha + x\cos\alpha))\,\mathrm{e}^{x\cos\alpha}$.

On en déduit, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$f^{(n)}(x) = \operatorname{Im} g^{(n)}(x) = \operatorname{Im}\left(\exp(i(n\alpha + x\cos\alpha))\,\mathrm{e}^{x\cos\alpha}\right) = \sin(n\alpha + x\sin\alpha)\,\mathrm{e}^{x\cos\alpha}$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Corrigé de l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

On procède par récurrence sur l'entier $n \geq 1$.

Pour $n = 1$, on a :

$$(n-1)!\cos^n y\ \sin(ny + n\tfrac{\pi}{2}) = \cos y \sin(y + \tfrac{\pi}{2}) = \cos^2 y = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2} = y'(x)$$

La propriété est donc vraie pour $n = 1$.

Supposons qu'elle le soit au rang $n \geq 1$ fixé. On a alors :

$$\begin{aligned} y^{(n+1)}(x) &= (n-1)!\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\cos^n y\ \sin(ny + n\tfrac{\pi}{2})\Big) \\ &= (n-1)!\,y'(x)\Big(-n\sin y \sin(ny + n\tfrac{\pi}{2}) + n\cos y\cos(ny + n\tfrac{\pi}{2})\Big)\cos^{(n-1)}(y) \\ &= n!\cos^2(y)\Big(\cos((n+1)y + n\tfrac{\pi}{2})\Big)\cos^{(n-1)}(y) \\ &= n!\cos^{(n+1)}(y)\sin((n+1)y + (n+1)\tfrac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

Ce qui établit la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.

Corrigé de l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

On utilise une décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $\dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1}{(x+i)(x-i)} = \dfrac{i}{2}\Big(\dfrac{1}{x+i} - \dfrac{1}{x-i}\Big)$.

On sait que la dérivée n-ième de $\dfrac{1}{x+\alpha}$ est $\dfrac{(-1)^n n!}{(x+\alpha)^{n+1}}$. On en déduit :

$$f^{(n)}(x) = \frac{i(-1)^n n!}{2}\Big(\frac{1}{(x+i)^{n+1}} - \frac{1}{(x-i)^{n+1}}\Big) = \frac{i(-1)^n n!((x-i)^{n+1} - (x+i)^{n+1})}{2(x^2+1)^{n+1}}$$

Les zéros de $f^{(n)}(x)$ sont donc ceux du polynôme $P_n(x) = (x-i)^{n+1} - (x+i)^{n+1}$.

On note $w_k = \exp 2i\theta_k$, avec $\theta_k = \dfrac{k\pi}{n+1}$, avec $0 \leq k \leq n$.

Les ω_k sont les $n+1$ racines $(n+1)$-ièmes de l'unité (en particulier $z_0 = 1$.)

On rappelle que pour tout u, v dans $\mathbb{C}$, on a $u^{n+1} = v^{n+1} \Leftrightarrow \exists\, k \in \{0, \ldots, n\},\ u = \omega_k v$.

Pour tout z de $\mathbb{C}$, on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} P_n(z) &= 0 \Leftrightarrow (z-i)^{n+1} = (z+i)^{n+1} \Leftrightarrow \exists k \in \{0, \ldots, n\},\ z - i = \omega_k(z+i) \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \{1, \ldots, n\},\ z = i\frac{1+\omega_k}{1-\omega_k} = i\frac{1+\mathrm{e}^{2i\theta_k}}{1-\mathrm{e}^{2i\theta_k}} = -i\frac{2\cos\theta_k}{2i\sin\theta_k} = -\operatorname{cotan}\theta_k \end{aligned}$$

Les θ_k forment une suite strictement croissante de $]0, \pi[$.

Ainsi $f^{(n)}$ possède n zéros distincts sur $\mathbb{R}$ qui sont les $x_k = -\operatorname{cotan}\theta_k$, avec $1 \leq k \leq n$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Corrigé de l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

On pose $y = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$, et $z_n = (4x)^{n+1/2} y^{(n+1)}$.

- On trouve tout d'abord $y' = \dfrac{y}{2\sqrt{x}}$ puis $y'' = \dfrac{y'}{2\sqrt{x}} - \dfrac{y}{4x\sqrt{x}} = \dfrac{y}{4x} - \dfrac{y'}{2x}$.

  On en déduit l'égalité $4xy'' + 2y' - y = 0$.

- On dérive n fois l'égalité précédente.

  On trouve $4xy^{(n+2)} + 4ny^{(n+1)} + 2y^{(n+1)} - y^{(n)} = 0$ donc $4xy^{(n+2)} + (4n+2)y^{(n+1)} - y^{(n)} = 0$.

- On multiplie membre à membre par $(4x)^{n+1/2}$.

  On trouve $(4x)^{n+3/2} y^{(n+2)} + (4n+2)(4x)^{n+1/2} y^{(n+1)} - 4x(4x)^{n-1/2} y^{(n)} = 0$.

  Autrement dit : $\begin{cases} z_1 + 2z_0 - 2\sqrt{y} = 0 \text{ si } n = 0 \\ z_{n+1} + (4n+2)z_n - 4xz_{n-1} = 0 \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$

- On dérive $n+1$ fois la dernière égalité. Pour tout n, on pose $Z_n = z_n^{(n)}$.

  On trouve $z_{n+1}^{(n+1)} + (4n+2)z_n^{(n+1)} - 4xz_{n-1}^{(n+1)} - 4(n+1)z_{n-1}^{(n)} = 0$.

  Autrement dit $Z_{n+1} + (4n+2)Z_n' - 4xZ_{n-1}'' - 4(n+1)Z_{n-1}' = 0$.

- Il reste à montrer que $Z_n = y$ et pour cela on procède par récurrence sur n.

  Tout d'abord $Z_0 = z_0 = 2\sqrt{x}\, y'(x)$ qui est bien égal à y.

  D'autre part $Z_1 = z_1' = (8x\sqrt{x}\, y'')'$ et on sait que $y'' = \dfrac{y'}{2x\sqrt{x}} - \dfrac{y}{4x\sqrt{x}}$.

  On en déduit $8x\sqrt{x}\, y'' = 4xy' - 2y$ puis $(8x\sqrt{x}\, y'')' = 4xy'' + 2y' = y$.

  Ainsi la propriété est vraie aux rangs $n = 0$ et $n = 1$.

  Supposons qu'elle le soit aux rangs $n-1$ et n ($n \geq 1$ donné). Ainsi $Z_{n-1} = Z_n = y$.

  Alors $Z_{n+1} + (4n+2)Z_n' - 4xZ_{n-1}'' - 4(n+1)Z_{n-1}' = 0$ devient $Z_{n+1} = 4xy'' + 2y' = y$.

  Cela établit la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021