Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [Indication] [Correction]

Calculer la dérivée n-ième de $f_n(x) = x^{n-1} \ln x$, avec $n \geq 1$.

EXERCICE 2 [Indication] [Correction]

Calculer la dérivée n-ième de $f(x) = \sin(x \cos \alpha)\, \mathrm{e}^{x \sin \alpha}$.
On proposera deux démonstrations différentes.

EXERCICE 3 [Indication] [Correction]

On pose $y(x) = \arctan x$. Montrer que $y^{(n)}(x) = (n-1)! \cos^n y \, \sin(ny + n\frac{\pi}{2})$.

EXERCICE 4 [Indication] [Correction]

Calculer les zéros de la dérivée n-ième de $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

EXERCICE 5 [Indication] [Correction]

Pour tout entier naturel n, établir que $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[(4x)^{n+1/2} \dfrac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}x^{n+1}} \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\right] = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$.

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

On a $f_{n+1}(x) = xf_n(x)$. Montrer par récurrence que $f_n^{(n)}(x)$ s'écrit sous la forme $\dfrac{a_n}{x}$.

Vérifier que $a_{n+1} = na_n$ pour tout $n \geq 1$. En déduire $f_n^{(n)}(x) = \dfrac{(n-1)!}{x}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [Retour à l'énoncé]

– Première méthode : remarquer que $f'(x) = \sin(\alpha + x\sin\alpha)\,\mathrm{e}^{x\cos\alpha}$.
  Prouver par récurrence que $f^{(n)}(x) = \sin(n\alpha + x\sin\alpha)\,\mathrm{e}^{x\cos\alpha}$.
– Deuxième méthode : remarquer que $f(x) = \operatorname{Im} g(x)$ avec $g(x) = \mathrm{e}^{\omega x}$ et $\omega = \mathrm{e}^{i\alpha}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [Retour à l'énoncé]

Procéder par récurrence sur $n \geq 1$, en remarquant d'abord que $y' = \cos^2 y$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [Retour à l'énoncé]

Remarquer que $f(x) = \dfrac{1}{(x+i)(x-i)} = \dfrac{i}{2}\Big(\dfrac{1}{x+i} - \dfrac{1}{x-i}\Big)$.

En déduire $f^{(n)}(x) = \dfrac{i(-1)^n n!((x-i)^{n+1} - (x+i)^{n+1})}{2(x^2+1)^{n+1}}$.

Chercher ensuite les zéros du polynôme $P_n(x) = (x-i)^{n+1} - (x+i)^{n+1}$.

On trouve n solutions distinctes : les $x_k = -\operatorname{cotan}\theta_k$, avec avec $\theta_k = \dfrac{k\pi}{n+1}$ et $1 \leq k \leq n$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [Retour à l'énoncé]

Poser $y = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$, $z_n = (4x)^{n+1/2}y^{(n+1)}$, puis établir $z_n^{(n)} = y$ par récurrence.

Pour celà, montrer que $4xy'' + 2y' - y = 0$, égalité qu'on dérivera n fois.

En déduire $z_1 + 2z_0 - 2y\sqrt{x} = 0$ et pour $n \geq 1$: $z_{n+1} + (4n+2)z_n - 4z_{n-1} = 0$.

Enfin, dériver $n+1$ fois l'égalité précédente.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

On vérifie que $f_1'(x) = (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ et $f_2''(x) = (x\ln x)'' = (1+\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 1$, il existe $a_n \in \mathbb{R}$ tel que $g_n(x) = f_n^{(n)}(x) = \dfrac{a_n}{x}$.

C'est vrai si $n = 1$. Supposons que ce le soit pour un entier $n \geq 1$ fixé. Alors :

$$\begin{aligned} g_{n+1}(x) &= f_{n+1}^{(n+1)}(x) = (xf_n(x))^{(n+1)}(x) = xf_n^{(n+1)}(x) + (n+1)f_n^{(n)}(x) \\ &= xg_n'(x) + (n+1)g_n(x) = -\frac{a_n}{x} + \frac{(n+1)a_n}{x} = \frac{na_n}{x} \end{aligned}$$

Ainsi il existe a_{n+1} tel que $g_{n+1}(x) = f_{n+1}^{(n+1)}(x) = \dfrac{a_{n+1}}{x}$, avec $a_{n+1} = na_n$.

Cela prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.

De plus la relation $a_{n+1} = na_n$ et l'égalité $a_1 = 1$ donnent $\forall\, n \geq 1,\ a_n = (n-1)!$

Conclusion : pour tout $n \geq 1$, on a $f_n^{(n)}(x) = \dfrac{(n-1)!}{x}$.

Corrigé de l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

On calcule la dérivée première de f :

$$f'(x) = ((\sin\alpha)\cos(x\sin\alpha) + (\cos\alpha)\sin(x\sin\alpha))\,\mathrm{e}^{x\cos\alpha} = \sin(\alpha + x\sin\alpha)\,\mathrm{e}^{x\cos\alpha}$$

Montrons que pour tout entier n, on a $f^{(n)}(x) = \sin(n\alpha + x\sin\alpha)\,\mathrm{e}^{x\cos\alpha}$.

La propriété est vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.

Supposons qu'elle le soit pour un entier $n \geq 0$ donné.

On en déduit :

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sin(n\alpha + x\sin\alpha)\,\mathrm{e}^{x\cos\alpha}\right) \\ &= ((\sin\alpha)\cos(n\alpha + x\sin\alpha) + (\cos\alpha)\sin(n\alpha + x\sin\alpha))\,\mathrm{e}^{x\cos\alpha} \\ &= \sin((n+1)\alpha + x\sin\alpha)\,\mathrm{e}^{x\cos\alpha} \end{aligned}$$

ce qui prouve la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.

Il y a une autre démonstration, qui utilise les fonctions à valeurs complexes.

On a en effet $f(x) = \operatorname{Im} g(x)$ avec $g(x) = \mathrm{e}^{ix\sin\alpha}\,\mathrm{e}^{x\cos\alpha} = \mathrm{e}^{\omega x}$ avec $\omega = \mathrm{e}^{i\alpha}$.

On a alors, pour tout n, $g^{(n)}(x) = \omega^n\,\mathrm{e}^{\omega x} = \mathrm{e}^{in\alpha}\,\mathrm{e}^{\omega x} = \exp(i(n\alpha + x\cos\alpha))\,\mathrm{e}^{x\cos\alpha}$.

On en déduit, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$f^{(n)}(x) = \operatorname{Im} g^{(n)}(x) = \operatorname{Im}\left(\exp(i(n\alpha + x\cos\alpha))\,\mathrm{e}^{x\cos\alpha}\right) = \sin(n\alpha + x\sin\alpha)\,\mathrm{e}^{x\cos\alpha}$.

Corrigé de l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

On procède par récurrence sur l'entier $n \geq 1$.

Pour $n = 1$, on a :

$$(n-1)!\cos^n y\,\sin(ny + n\tfrac{\pi}{2}) = \cos y \sin(y + \tfrac{\pi}{2}) = \cos^2 y = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2} = y'(x)$$

La propriété est donc vraie pour $n = 1$.

Supposons qu'elle le soit au rang $n \geq 1$ fixé. On a alors :

$$\begin{aligned}
y^{(n+1)}(x) &= (n-1)!\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\cos^n y\,\sin(ny + n\tfrac{\pi}{2})\Big)\\
&= (n-1)!\,y'(x)\Big(-n\sin y\sin(ny + n\tfrac{\pi}{2}) + n\cos y\cos(ny + n\tfrac{\pi}{2})\Big)\cos^{(n-1)}(y)\\
&= n!\cos^2(y)\Big(\cos((n+1)y + n\tfrac{\pi}{2})\Big)\cos^{(n-1)}(y)\\
&= n!\cos^{(n+1)}(y)\sin((n+1)y + (n+1)\tfrac{\pi}{2})
\end{aligned}$$

Ce qui établit la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.

Corrigé de l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

On utilise une décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(\mathrm{X})$.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $\dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{1}{(x+i)(x-i)} = \dfrac{i}{2}\Big(\dfrac{1}{x+i} - \dfrac{1}{x-i}\Big)$.

On sait que la dérivée n-ième de $\dfrac{1}{x+\alpha}$ est $\dfrac{(-1)^n n!}{(x+\alpha)^{n+1}}$. On en déduit :

$$f^{(n)}(x) = \frac{i(-1)^n n!}{2}\Big(\frac{1}{(x+i)^{n+1}} - \frac{1}{(x-i)^{n+1}}\Big) = \frac{i(-1)^n n!((x-i)^{n+1} - (x+i)^{n+1})}{2(x^2+1)^{n+1}}$$

Les zéros de $f^{(n)}(x)$ sont donc ceux du polynôme $P_n(x) = (x-i)^{n+1} - (x+i)^{n+1}$.

On note $w_k = \exp 2i\theta_k$, avec $\theta_k = \dfrac{k\pi}{n+1}$, avec $0 \leq k \leq n$.

Les ω_k sont les $n+1$ racines $(n+1)$-ièmes de l'unité (en particulier $z_0 = 1$.)

On rappelle que pour tout u, v dans $\mathbb{C}$, on a $u^{n+1} = v^{n+1} \Leftrightarrow \exists\, k \in \{0,\ldots,n\},\ u = \omega_k v$.

Pour tout z de $\mathbb{C}$, on peut donc écrire :

$$\begin{aligned}
P_n(z) &= 0 \Leftrightarrow (z-i)^{n+1} = (z+i)^{n+1} \Leftrightarrow \exists k \in \{0,\ldots,n\},\ z - i = \omega_k(z+i)\\
&\Leftrightarrow \exists k \in \{1,\ldots,n\},\ z = i\frac{1+\omega_k}{1-\omega_k} = i\frac{1+\mathrm{e}^{2i\theta_k}}{1-\mathrm{e}^{2i\theta_k}} = -i\frac{2\cos\theta_k}{2i\sin\theta_k} = -\operatorname{cotan}\theta_k
\end{aligned}$$

Les θ_k forment une suite strictement croissante de $]0,\pi[$.

Ainsi $f^{(n)}$ possède n zéros distincts sur $\mathbb{R}$ qui sont les $x_k = -\operatorname{cotan}\theta_k$, avec $1 \leq k \leq n$.

Corrigé de l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

On pose $y = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}$, et $z_n = (4x)^{n+1/2} y^{(n+1)}$.

– On trouve tout d'abord $y' = \dfrac{y}{2\sqrt{x}}$ puis $y'' = \dfrac{y'}{2\sqrt{x}} - \dfrac{y}{4x\sqrt{x}} = \dfrac{y}{4x} - \dfrac{y'}{2x}$.

  On en déduit l'égalité $4xy'' + 2y' - y = 0$.

– On dérive n fois l'égalité précédente.

  On trouve $4xy^{(n+2)} + 4ny^{(n+1)} + 2y^{(n+1)} - y^{(n)} = 0$ donc $4xy^{(n+2)} + (4n+2)y^{(n+1)} - y^{(n)} = 0$.

– On multiplie membre à membre par $(4x)^{n+1/2}$.

  On trouve $(4x)^{n+3/2} y^{(n+2)} + (4n+2)(4x)^{n+1/2} y^{(n+1)} - 4x(4x)^{n-1/2} y^{(n)} = 0$.

  Autrement dit : $\begin{cases} z_1 + 2z_0 - 2\sqrt{y} = 0 \text{ si } n = 0 \\ z_{n+1} + (4n+2)z_n - 4xz_{n-1} = 0 \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$

– On dérive $n+1$ fois la dernière égalité. Pour tout n, on pose $Z_n = z_n^{(n)}$.

  On trouve $z_{n+1}^{(n+1)} + (4n+2)z_n^{(n+1)} - 4xz_{n-1}^{(n+1)} - 4(n+1)z_{n-1}^{(n)} = 0$.

  Autrement dit $Z_{n+1} + (4n+2)Z'_n - 4xZ''_{n-1} - 4(n+1)Z'_{n-1} = 0$.

– Il reste à montrer que $Z_n = y$ et pour cela on procède par récurrence sur n.

  Tout d'abord $Z_0 = z_0 = 2\sqrt{x}\, y'(x)$ qui est bien égal à y.

  D'autre part $Z_1 = z'_1 = (8x\sqrt{x}\, y'')'$ et on sait que $y'' = \dfrac{y'}{2x\sqrt{x}} - \dfrac{y}{4x\sqrt{x}}$.

  On en déduit $8x\sqrt{x}\, y'' = 4xy' - 2y$ puis $(8x\sqrt{x}\, y'')' = 4xy'' + 2y' = y$.

  Ainsi la propriété est vraie aux rangs $n = 0$ et $n = 1$.

  Supposons qu'elle le soit aux rangs $n-1$ et n ($n \geq 1$ donné). Ainsi $Z_{n-1} = Z_n = y$.

  Alors $Z_{n+1} + (4n+2)Z'_n - 4xZ''_{n-1} - 4(n+1)Z'_{n-1} = 0$ devient $Z_{n+1} = 4xy'' + 2y' = y$.

  Cela établit la propriété au rang $n+1$ et achève la récurrence.