



## Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , continue, telle que :  $\forall (x, y) \in I^2, f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$ .

Montrer que  $f$  est convexe.

EXERCICE 2 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Montrer que pour tout  $\lambda$  de  $\mathbb{R}$  et tout  $x$  de  $[-1, 1]$ , on a :  $e^{\lambda x} \leq \text{ch } \lambda + x \text{ sh } \lambda$ .

EXERCICE 3 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soient  $p, q$  dans  $\mathbb{R}^{+*}$  tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Montrer que  $\forall a, b \in \mathbb{R}^{+*}, \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \geq ab$ .

EXERCICE 4 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Pour tous  $x, y$  de  $]1, +\infty[$ , montrer que  $\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln x \ln y}$ .



## Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Soient  $x < y$ . Prouver que  $\forall k \in \{0, \dots, 2^n\}$ ,  $f\left(\frac{k}{2^n}x + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)y\right) \leq \frac{k}{2^n}f(x) + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)f(y)$ .

Se donner  $\lambda \in [0, 1]$ . Justifier l'existence de  $k_n$  de  $\{0, \dots, 2^n - 1\}$  tel que  $\frac{k_n}{2^n} \leq \lambda < \frac{k_n + 1}{2^n}$ .

Utiliser alors la suite des  $\lambda_n = \frac{k_n}{2^n}$  et la continuité de  $f$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Utiliser la convexité de  $f : x \mapsto e^{\lambda x}$  sur  $[-1, 1]$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Utiliser la concavité de  $x \mapsto \ln x$ , entre  $x = a^p$  et  $y = b^q$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

L'inégalité à prouver équivaut à  $\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2}$ , avec  $\varphi(t) = \ln \ln t$ .

## Corrigés des exercices

### CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1 [Retour à l'énoncé]

Soient  $x, y$  fixés, avec  $x < y$ . On va montrer par récurrence sur  $n \geq 1$  la propriété :

$$\forall k \in \{0, \dots, 2^n\}, f\left(\frac{k}{2^n}x + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)y\right) \leq \frac{k}{2^n}f(x) + \left(1 - \frac{k}{2^n}\right)f(y)$$

Remarquons que pour  $k = 0$  ou  $k = 2^n$ , cette inégalité est évidente (c'est même une égalité).

Si  $n = 1$  la propriété se réduit à  $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$  : c'est l'hypothèse de l'énoncé.

On se donne un entier  $n \geq 1$ , et on suppose que la propriété est vraie au rang  $n$ .

Soit  $k \in \{1, \dots, 2^{n+1} - 1\}$ . Posons  $a_k = \frac{k}{2^{n+1}}x + \left(1 - \frac{k}{2^{n+1}}\right)y$  et  $b_k = \frac{k}{2^{n+1}}f(x) + \left(1 - \frac{k}{2^{n+1}}\right)f(y)$ .

Il s'agit de prouver l'inégalité  $f(a_k) \leq b_k$ .

– Supposons que  $k$  soit pair :  $k = 2m$  avec  $0 \leq m \leq 2^n$ .

L'inégalité à démontrer se réduit donc à  $f\left(\frac{m}{2^n}x + \left(1 - \frac{m}{2^n}\right)y\right) \leq \frac{m}{2^n}f(x) + \left(1 - \frac{m}{2^n}\right)f(y)$ .

Le résultat est donc une conséquence directe de l'hypothèse de récurrence.

– Supposons que  $k$  soit impair :  $k = 2m + 1$  avec  $0 \leq m \leq 2^n - 1$ .

Alors  $a_k = a_{2m+1} = \frac{a_{2m} + a_{2m+2}}{2}$  et  $b_k = \frac{b_{2m} + b_{2m+2}}{2}$ .

On sait d'après le cas précédent que  $f(a_{2m}) \leq b_{2m}$  et  $f(a_{2m+2}) \leq b_{2m+2}$ .

L'énoncé donne  $f(a_k) = f\left(\frac{a_{2m} + a_{2m+2}}{2}\right) \leq \frac{f(a_{2m}) + f(a_{2m+2})}{2} \leq \frac{b_{2m} + b_{2m+2}}{2}$ .

Ainsi  $f(a_k) \leq b_k$ , ce qui prouve la propriété au rang  $n + 1$  et achève la récurrence.

On se donne maintenant un réel  $\lambda$  quelconque entre  $[0, 1]$ .

Pour tout  $n$ , il existe un plus grand entier  $k_n$  de  $\{0, \dots, 2^n - 1\}$  tel que  $\lambda_n = \frac{k_n}{2^n} \leq \lambda < \frac{k_n + 1}{2^n}$ .

La suite des  $\lambda_n$  est convergente vers  $\lambda$  car  $0 \leq \lambda - \lambda_n < \frac{1}{2^n}$ .

D'autre part, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on a  $f(\lambda_n x + (1 - \lambda_n)y) \leq \lambda_n f(x) + (1 - \lambda_n)f(y)$ .

Quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , on a  $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda_n x + (1 - \lambda_n)y) = \lambda x + (1 - \lambda)y \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda_n f(x) + (1 - \lambda_n)f(y)) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \end{cases}$

La continuité de  $f$  donne alors  $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$ .

On a ainsi prouvé la convexité de l'application  $f$ .

**CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2** [[Retour à l'énoncé](#)]

L'application  $f : x \mapsto e^{\lambda x}$  est convexe (sa dérivée seconde  $\lambda^2 e^{\lambda x}$  est positive.)

L'équation de la droite reliant les points d'abscisse  $-1$  et  $1$  de la courbe  $y = f(x)$  est :

$$y = g(x) \text{ avec } g(x) = f(-1) + (x+1) \frac{f(1) - f(-1)}{2} = e^{-\lambda} + (x+1) \operatorname{sh} \lambda = \operatorname{ch} \lambda + x \operatorname{sh} \lambda$$

La convexité de  $f$  implique :  $\forall x \in [-1, 1], f(x) \leq g(x)$ , ce qui est le résultat attendu.

**CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3** [[Retour à l'énoncé](#)]

Pour tous  $x, y$  dans  $\mathbb{R}^{+*}$ , on a  $\ln\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) \geq \frac{\ln x}{p} + \frac{\ln y}{q}$  (concavité de  $x \mapsto \ln x$ .)

Si on applique ce résultat à  $x = a^p$  et  $y = b^q$ , on trouve :  $\ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geq \ln a + \ln b$ .

Ainsi  $\ln(ab) \leq \ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right)$  puis  $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ .

**CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4** [[Retour à l'énoncé](#)]

Par composition avec  $t \mapsto \ln t$ , l'inégalité à prouver équivaut à  $\ln \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \ln \sqrt{\ln x \ln y}$ .

Cette inégalité s'écrit encore  $\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2}$  avec  $\varphi(t) = \ln \ln t$ .

Pour obtenir le résultat il suffit donc de vérifier la concavité de  $\varphi$ .

Celle-ci résulte de la décroissance de  $t \mapsto \varphi'(t) = \frac{1}{t \ln t}$  sur  $]1, +\infty[$ .