Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, continue, telle que : $\forall (x, y) \in I^2, f\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \leq \dfrac{f(x)+f(y)}{2}$.
Montrer que f est convexe.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Montrer que pour tout λ de $\mathbb{R}$ et tout x de $[-1, 1]$, on a : $\mathrm{e}^{\lambda x} \leq \operatorname{ch}\lambda + x \operatorname{sh}\lambda$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Soient p, q dans $\mathbb{R}^{+*}$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Montrer que $\forall a, b \in \mathbb{R}^{+*}$, $\dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q} \geq ab$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Pour tous x, y de $]1, +\infty[$, montrer que $\ln\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln x \ln y}$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Soient $x < y$. Prouver que $\forall k \in \{0, \dots, 2^n\}$, $f\Big(\dfrac{k}{2^n}x + (1 - \dfrac{k}{2^n})y\Big) \leq \dfrac{k}{2^n}f(x) + (1 - \dfrac{k}{2^n})f(y)$.

Se donner $\lambda \in [0, 1]$. Justifier l'existence de k_n de $\{0, \dots, 2^n - 1\}$ tel que $\dfrac{k_n}{2^n} \leq \lambda < \dfrac{k_n + 1}{2^n}$.

Utiliser alors la suite des $\lambda_n = \dfrac{k_n}{2^n}$ et la continuité de f.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Utiliser la convexité de $f : x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ sur $[-1, 1]$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Utiliser la concavité de $x \mapsto \ln x$, entre $x = a^p$ et $y = b^q$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

L'inégalité à prouver équivaut à $\varphi\Big(\dfrac{x + y}{2}\Big) \geq \dfrac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2}$, avec $\varphi(t) = \ln \ln t$.

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Soient x, y fixés, avec $x < y$. On va montrer par récurrence sur $n \geq 1$ la propriété :

$$\forall k \in \{0, \dots, 2^n\}, f\Big(\frac{k}{2^n}x + (1 - \frac{k}{2^n})y\Big) \leq \frac{k}{2^n}f(x) + (1 - \frac{k}{2^n})f(y)$$

Remarquons que pour $k = 0$ ou $k = 2n$, cette inégalité est évidente (c'est même une égalité).

Si $n = 1$ la propriété se réduit à $f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$: c'est l'hypothèse de l'énoncé.

On se donne un entier $n \geq 1$, et on suppose que la propriété est vraie au rang n.

Soit $k \in \{1, \dots, 2^{n+1} - 1\}$. Posons $a_k = \frac{k}{2^{n+1}}x + (1 - \frac{k}{2^{n+1}})y$ et $b_k = \frac{k}{2^{n+1}}f(x) + (1 - \frac{k}{2^{n+1}})f(y)$.

Il s'agit de prouver l'inégalité $f(a_k) \leq b_k$.

– Supposons que k soit pair : $k = 2m$ avec $0 \leq m \leq 2^n$.

L'inégalité à démontrer se réduit donc à $f\Big(\frac{m}{2^n}x + (1 - \frac{m}{2^n})y\Big) \leq \frac{m}{2^n}f(x) + (1 - \frac{m}{2^n})f(y)$.

Le résultat est donc une conséquence directe de l'hypothèse de récurrence.

– Supposons que k soit impair : $k = 2m + 1$ avec $0 \leq m \leq 2^n - 1$.

Alors $a_k = a_{2m+1} = \frac{a_{2m} + a_{2m+2}}{2}$ et $b_k = \frac{b_{2m} + b_{2m+2}}{2}$.

On sait d'après le cas précédent que $f(a_{2m}) \leq b_{2m}$ et $f(a_{2m+2}) \leq b_{2m+2}$.

L'énoncé donne $f(a_k) = f\Big(\frac{a_{2m} + a_{2m+2}}{2}\Big) \leq \frac{f(a_{2m}) + f(a_{2m+2})}{2} \leq \frac{b_{2m} + b_{2m+2}}{2}$.

Ainsi $f(a_k) \leq b_k$, ce qui prouve la propriété au rang $n + 1$ et achève la récurrence.

On se donne maintenant un réel λ quelconque entre $[0, 1]$.

Pour tout n, il existe un plus grand entier k_n de $\{0, \dots, 2^n - 1\}$ tel que $\lambda_n = \frac{k_n}{2^n} \leq \lambda < \frac{k_n + 1}{2^n}$.

La suite des λ_n est convergente vers λ car $0 \leq \lambda - \lambda_n < \frac{1}{2^n}$.

D'autre part, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $f(\lambda_n x + (1 - \lambda_n)y) \leq \lambda_n f(x) + (1 - \lambda_n)f(y)$.

Quand n tend vers $+\infty$, on a $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} (\lambda_n x + (1 - \lambda_n)y) = \lambda x + (1 - \lambda)y \\ \lim\limits_{n\to+\infty} (\lambda_n f(x) + (1 - \lambda_n)f(y)) = \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \end{cases}$

La continuité de f donne alors $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$.

On a ainsi prouvé la convexité de l'application f.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Corrigé de l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

L'application $f : x \mapsto \mathrm{e}^{\lambda x}$ est convexe (sa dérivée seconde $\lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda x}$ est positive.)

L'équation de la droite reliant les points d'abscisse -1 et 1 de la courbe $y = f(x)$ est :

$$y = g(x) \text{ avec } g(x) = f(-1) + (x+1)\frac{f(1) - f(-1)}{2} = \mathrm{e}^{-\lambda} + (x+1)\,\mathrm{sh}\,\lambda = \mathrm{ch}\,\lambda + x\,\mathrm{sh}\,\lambda$$

La convexité de f implique : $\forall\, x \in [-1,1],\ f(x) \leq g(x)$, ce qui est le résultat attendu.

Corrigé de l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Pour tous x, y dans $\mathbb{R}^{+*}$, on a $\ln\left(\dfrac{x}{p} + \dfrac{y}{q}\right) \geq \dfrac{\ln x}{p} + \dfrac{\ln y}{q}$ (concavité de $x \mapsto \ln x$.)

Si on applique ce résultat à $x = a^p$ et $y = b^q$, on trouve : $\ln\left(\dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}\right) \geq \ln a + \ln b$.

Ainsi $\ln(ab) \leq \ln\left(\dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}\right)$ puis $ab \leq \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q}$.

Corrigé de l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

Par composition avec $t \mapsto \ln t$, l'inégalité à prouver équivaut à $\ln\ln\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \geq \ln\sqrt{\ln x \ln y}$.

Cette inégalité s'écrit encore $\varphi\left(\dfrac{x+y}{2}\right) \geq \dfrac{\varphi(x) + \varphi(y)}{2}$ avec $\varphi(t) = \ln\ln t$.

Pour obtenir le résultat il suffit donc de vérifier la concavité de φ.

Celle-ci résulte de la décroissance de $t \mapsto \varphi'(t) = \dfrac{1}{t \ln t}$ sur $]1, +\infty[$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021