Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n$, avec $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}}$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n$, avec $S_n = \left(\frac{n!}{n^n}\right)^{1/n}$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Montrer que $S_n \sim 2\sqrt{n}$, avec $S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n(x)$, avec $S_n(x) = \frac{1^x + 2^x + \cdots + n^x}{n^{x+1}}$ (et x réel).

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Utiliser la croissance de l'application $x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $[0,1[$.

En déduire $\displaystyle\int_0^{\frac{n-1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x \leq S_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{\pi}{2}$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Vérifier que $\ln S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \ln\frac{k}{n}$.

Utiliser la croissance de l'application $x \mapsto \ln x$ sur $]0,1]$.

En déduire $\displaystyle\int_0^{\frac{n-1}{n}} \ln x\,\mathrm{d}x \leq S_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 \ln x\,\mathrm{d}x$, puis $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Utiliser la décroissance de $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

En déduire que $\displaystyle\int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} \leq S_n - 1 \leq \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$, puis $S_n \sim 2\sqrt{n}$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

– Si $x \leq -1$, on trouve $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = +\infty$.

– Si $-1 < x$, écrire $S_n(x) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ avec $f(t) = t^x$.

Constater que f est monotone et intégrable sur $[0,1]$.

En déduire que $S_n(x)$ est compris entre $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ et $J_n = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{n+1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Obtenir finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

On constate que $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2-k^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$, avec $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

L'application f n'est pas continue par morceaux sur $[0,1]$ car $\lim_{x\to 1^-} = +\infty$.

Pour cette raison, on ne peut pas utiliser les sommes de Riemann.

En revanche, f est croissante ce qui nous permet de procéder par encadrements.

La croissance de f donne $\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

(On rappelle que f est intégrable au voisinage de 1, ce qui permet de considérer $k = n-1$.)

En sommant de $k=1$ à $k=n-1$, il vient $\int_0^{\frac{n-1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x \leq S_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Autrement dit : $\arcsin\left(1-\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{1}{n}$, donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi}{2}$.

Corrigé de l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

On constate que $\ln S_n = \frac{1}{n}\ln\frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n}\ln\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\ln\frac{k}{n}$.

La fonction $x \mapsto \ln x$ n'est pas continue par morceaux sur $[0,1]$ mais elle y est croissante.

Comme dans l'exercice précédent, on procède par encadrements.

Pour tout entier k de $\{1,\dots,n-1\}$, on $\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \ln x\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{n}\ln\frac{k}{n} \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln x\,\mathrm{d}x$.

(Rappel : $x \mapsto \ln x$ est intégrable au voisinage de 0, ce qui permet de considérer $k=1$.)

On en déduit par sommation $\int_0^{\frac{n-1}{n}} \ln x\,\mathrm{d}x \leq S_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 \ln x\,\mathrm{d}x$.

Quand $n \to \infty$, les deux termes de l'encadrement tendent vers $\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x = [x\ln x - x]_0^1 = -1$.

Ainsi $\ln S_n$ tend vers -1 et donc S_n vers $\frac{1}{\mathrm{e}}$ quand n tend vers ∞.

Corrigé de l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc $\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ pour tout $k \geq 2$.

Il en découle $\int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}} \leq S_n - 1 \leq \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ par sommation de $k=2$ à $k=n$.

Autrement dit, pour tout $n \geq 2$: $2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2} + 1 \leq S_n \leq 2\sqrt{n} - 1$.

On en déduit $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{2\sqrt{n}} = 1$, c'est-à-dire $S_n \sim 2\sqrt{n}$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Corrigé de l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

– Si $x < -1$: pour tout x, on a $S_n(x) \geq \dfrac{1}{n^{x+1}}$.

Mais $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^{x+1}} = +\infty$ si $x < -1$.

On en déduit que si $x < -1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = +\infty$.

– Si $x = -1$: on a $S_n(-1) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ et on sait que cette somme tend vers $+\infty$ avec n.

– Si $-1 < x$: on écrit $S_n(x) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{k}{n}\right)^x = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ avec $f(t) = t^x$.

L'application f est monotone sur $[0,1]$, et intégrable car $x > -1$.

Plus précisément, $f'(t) = xt^{x-1}$: f est donc $\begin{cases} \text{décroissante si } -1 < x \leq 0 \\ \text{croissante si } x \geq 0 \end{cases}$

Posons $I_k = \displaystyle\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x$: $y_k = \dfrac{1}{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ est donc compris entre I_{k-1} et I_k.

Plus précisément, $\begin{cases} I_{k-1} \leq y_k \leq I_k \text{ si } f \text{ est croissante, c-à-d } x \geq 0 \\ I_{k-1} \geq y_k \geq I_k \text{ si } f \text{ est décroissante, c-à-d } x \leq 0 \end{cases}$.

On somme pour $1 \leq k \leq n$.

On en déduit que $S_n(x)$ est compris entre $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ et $J_n = \displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{n+1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Mais $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = I = \left[\dfrac{t^{x+1}}{x+1}\right]_{t=0}^{t=1} = \dfrac{1}{x+1}$.

Conclusion : si $x > -1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021