



Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$, avec $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 - k^2}}$.

EXERCICE 2 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$, avec $S_n = \left(\frac{n!}{n^n}\right)^{1/n}$.

EXERCICE 3 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Montrer que $S_n \sim 2\sqrt{n}$, avec $S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

EXERCICE 4 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x)$, avec $S_n(x) = \frac{1^x + 2^x + \dots + n^x}{n^{x+1}}$ (et x réel).

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [[Retour à l'énoncé](#)]

Utiliser la croissance de l'application $x \mapsto f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur $[0, 1[$.

En déduire $\int_0^{\frac{n-1}{n}} f(x) dx \leq S_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x) dx$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{\pi}{2}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [[Retour à l'énoncé](#)]

Vérifier que $\ln S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \ln \frac{k}{n}$.

Utiliser la croissance de l'application $x \mapsto \ln x$ sur $]0, 1]$.

En déduire $\int_0^{\frac{n-1}{n}} \ln x dx \leq S_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 \ln x dx$, puis $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{e}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [[Retour à l'énoncé](#)]

Utiliser la décroissance de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ sur \mathbb{R}^{+*} .

En déduire que $\int_2^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \leq S_n - 1 \leq \int_1^n \frac{dx}{\sqrt{x}}$, puis $S_n \sim 2\sqrt{n}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [[Retour à l'énoncé](#)]

– Si $x \leq -1$, on trouve $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = +\infty$.

– Si $-1 < x$, écrire $S_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$ avec $f(t) = t^x$.

Constater que f est monotone et intégrable sur $[0, 1]$.

En déduire que $S_n(x)$ est compris entre $I = \int_0^1 f(x) dx$ et $J_n = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{n+1}{n}} f(x) dx$.

Obtenir finalement $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \frac{1}{x+1}$.

Corrigés des exercices

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

On constate que $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 - k^2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$, avec $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

L'application f n'est pas continue par morceaux sur $[0, 1]$ car $\lim_{x \rightarrow 1^-} = +\infty$.

Pour cette raison, on ne peut pas utiliser les sommes de Riemann.

En revanche, f est croissante ce qui nous permet de procéder par encadrements.

La croissance de f donne $\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx$.

(On rappelle que f est intégrable au voisinage de 1, ce qui permet de considérer $k = n - 1$.)

En sommant de $k = 1$ à $k = n - 1$, il vient $\int_0^{\frac{n-1}{n}} f(x) dx \leq S_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x) dx$.

Autrement dit : $\arcsin\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{1}{n}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{\pi}{2}$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

On constate que $\ln S_n = \frac{1}{n} \ln \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \ln \prod_{k=1}^n \frac{k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \frac{k}{n}$.

La fonction $x \mapsto \ln x$ n'est pas continue par morceaux sur $[0, 1]$ mais elle y est croissante.

Comme dans l'exercice précédent, on procède par encadrements.

Pour tout entier k de $\{1, \dots, n-1\}$, on $\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \ln x dx \leq \frac{1}{n} \ln \frac{k}{n} \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \ln x dx$.

(Rappel : $x \mapsto \ln x$ est intégrable au voisinage de 0, ce qui permet de considérer $k = 1$.)

On en déduit par sommation $\int_0^{\frac{n-1}{n}} \ln x dx \leq S_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^1 \ln x dx$.

Quand $n \rightarrow \infty$, les deux termes de l'encadrement tendent vers $\int_0^1 \ln x dx = [x \ln x - x]_0^1 = -1$.

Ainsi $\ln S_n$ tend vers -1 et donc S_n vers $\frac{1}{e}$ quand n tend vers ∞ .

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ est décroissante sur \mathbb{R}^{+*} , donc $\int_k^{k+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \int_{k-1}^k \frac{dx}{\sqrt{x}}$ pour tout $k \geq 2$.

Il en découle $\int_2^{n+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \leq S_n - 1 \leq \int_1^n \frac{dx}{\sqrt{x}}$ par sommation de $k = 2$ à $k = n$.

Autrement dit, pour tout $n \geq 2$: $2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2} + 1 \leq S_n \leq 2\sqrt{n} - 1$.

On en déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{2\sqrt{n}} = 1$, c'est-à-dire $S_n \sim 2\sqrt{n}$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4 [[Retour à l'énoncé](#)]

– Si $x < -1$: pour tout x , on a $S_n(x) \geq \frac{1}{n^{x+1}}$.

Mais $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{x+1}} = +\infty$ si $x < -1$.

On en déduit que si $x < -1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = +\infty$.

– Si $x = -1$: on a $S_n(-1) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et on sait que cette somme tend vers $+\infty$ avec n .

– Si $-1 < x$: on écrit $S_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^x = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$ avec $f(t) = t^x$.

L'application f est monotone sur $[0, 1]$, et intégrable car $x > -1$.

Plus précisément, $f'(t) = xt^{x-1}$: f est donc $\begin{cases} \text{décroissante si } -1 < x \leq 0 \\ \text{croissante si } x \geq 0 \end{cases}$

Posons $I_k = \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx$: $y_k = \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ est donc compris entre I_{k-1} et I_k .

Plus précisément, $\begin{cases} I_{k-1} \leq y_k \leq I_k \text{ si } f \text{ est croissante, c-à-d } x \geq 0 \\ I_{k-1} \geq y_k \geq I_k \text{ si } f \text{ est décroissante, c-à-d } x \leq 0 \end{cases}$

On somme pour $1 \leq k \leq n$.

On en déduit que $S_n(x)$ est compris entre $I = \int_0^1 f(x) dx$ et $J_n = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{n+1}{n}} f(x) dx$.

Mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = I = \left[\frac{t^{x+1}}{x+1} \right]_{t=0}^{t=1} = \frac{1}{x+1}$.

Conclusion : si $x > -1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \frac{1}{x+1}$.