Séries Numériques II : cinq exercices

1 Nature de la série de terme général u_n défini par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \ln\left(C_n^k\right)}$$

.



Indication exercice 1

2 On donne la suite u définie par

$$\begin{cases} u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 \operatorname{cotan}\left(u_n\right) \end{cases}$$

Déterminer un développement asymptotique à deux termes de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.



Indication exercice 2

3 Soit la suite u définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{\sqrt{(n-1)!}}{\prod_{1 \leqslant p \leqslant n} \left(1 + \sqrt{p}\right)}$$

1) Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente .

2) Déterminer la somme de la série $\sum u_n$.

3) Déterminer un équivalent de u_n à une constante près lorsque n tend vers plus l'infini .



Indication exercice 3

4 On donne deux suites réelles ou complexes u et v , on appelle S la suite réelle ou complexe définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} u_k v_k$$

Soit V la "primitive " de la suite v définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, Vn = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} v_k$.

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

1) Montrer que : (Transformation d'Abel)

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = u_n V_n + \sum_{1 \leqslant k \leqslant n-1} (u_k - u_{k-1}) V_k$$

2) En déduire que si la suite V est bornée et si la suite u est réelle décroissante de limite nulle alors la série $\sum u_n v_n$ est convergente .

3) Montrer que la série $\sum \dfrac{\sin^2 k}{k^2}$ est une série convergente, déterminer la nature de la série de terme général le reste ;

$$R_n = \sum_{n+1 \leqslant k} \frac{\sin^2 k}{k^2}$$

Indication exercice 4

5 On pose $u_n = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} (-1)^{k+1} \sqrt{k}$.

1) Déterminer un équivalent de u_n lorsque n tend vers l'infini.

2) Montrer que la suite v définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n + u_{n+1}$ admet une limite strictement positive .

3) Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{u_n}$.

Indication exercice 5

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Indications ou résultats

1 Indication exercice 1. [E]

Une idée peut être de chercher un équivalent de $\sum_{1\leqslant k\leqslant n} \ln\left(C_n^k\right)$ lorsque n tend vers l'infini , on peut essayer de comparer avec une intégrale en explicitant le terme général et remplacer la variable k par une variable "continue" x et intégrer , puis espérer que les termes qui encadrent les expressions soient simples . On peut aussi essayer d'utiliser les sommations des relations de comparaison (Comment?).

Solution exercice 1

2 Indication exercice 2. [E]

On commence par étudier la suite , ne pas se jeter sur l'étude de la fonction sans réfléchir , ce n'est qu'un moyen pour étudier ce genre de suite . Pour l'équivalent , utiliser la méthode classique de $u_{n+1}^{\alpha}-u_n^{\alpha}$ .Pour le reste , il faut «pousser» le développement limité .

Solution exercice 2

3 Indication exercice 3. [E]

1) Essayer de montrer «à la main» que $u_n = O\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ lorsque n tend vers plus l'infini.

2) Utilisez des séries télescopiques.

3) On remarque que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, on peut déterminer un équivalent de $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ au voisinage de plus l'infini , puis essayer d'en déduire la forme de l'équivalent .

Solution exercice 3

4 Indication exercice 4. [E]

1) Il suffit de vérifier .

2) Montrer que la suite S est de Cauchy en majorant $|S_{n+p}-S_n|$ à l'aide la transformation d'Abel .

3) On note : $\forall n\in\mathbb{N}^*, U_n = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \cos(2k)$, montrer que la suite $(U_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée . En appliquant la transformation d'Abel ,montrer que :

$$\sum_{n+1\leqslant k} \frac{\cos 2k}{k^2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

En remarquant par exemple que ; $\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1} = \dfrac{1}{k\,(k+1)}$,en déduire un équivalent de R_n.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Solution exercice 4

5 Indication exercice 5. [E]

1) Ce qui compte ce n'est pas la parité , c'est le fait que $(-1)^k$ change de signe avec la parité de k, il suffit de changer k en $k+1$.(Où ?)

2) Utiliser le théorème spécial des séries alternées .

3) On connaît le comportement asymptotique de $u_{n+1}-u_n$,je pense qu'il doit être possible de déterminer le comportement asymptotique de $u_{n+1}+u_n$, puis en déduire celui de u_n.

Solution exercice 5

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Corrigés des exercices

1 Solution de l'exercice 1 . [E]

On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \ln\left(C_n^k\right)$,on cherche un équivalent , on forme la série "dérivée" de terme général $w_n = v_{n+1} - v_n$. On obtient $v_n = (n-1)\ln n! - 2\sum_{1\leqslant k\leqslant n} \ln k!$, ce qui donne :

$$w_n = n\ln(n+1) - \ln n!$$

De même , $w_{n+1} - w_n = (n+1)\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$,or $\frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1}$,donc $w_{n+1} - w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$,la série divergente de terme général $w_{n+1} - w_n$ est à termes positifs à partir d'un certain rang , on en déduit que les sommes partielles sont équivalentes , soit : $\sum_{1\leqslant k\leqslant n} w_{k+1} - w_k \underset{n\to+\infty}{\sim} n$, soit $w_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} n$, or $n \underset{n\to+\infty}{\sim} n+1$, donc $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$. De même

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant n} v_{k+1} - v_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{1\leqslant k\leqslant n} k$$

Ce qui donne $v_{n+1} - v_1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n(n+1)}{2}$, d'où

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2}{2}$$

On a alors $\frac{1}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}$, la série de terme général $\frac{1}{v_n}$ est à termes positifs , son terme général est équivalent au terme général d'une série Riemannienne convergente , c'est donc une série convergente .

2 Solution de l'exercice 2. [E]

On sait que $\forall x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, $0 < x < \tan(x)$, il suffit d'étudier l'application $x \mapsto \tan(x) - x$ sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. On en déduit que $\forall x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$,$0 < x^2\operatorname{cotan}(x) < x$ Par une récurrence évidente ,on obtient que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, et que $u_{n+1} < u_n$. La suite u est positive , décroissante , donc convergente dans $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,la suite u étant décroissante , sa limite l vérifie $l \leqslant u_0 < \frac{\pi}{2}$.Donc $l \neq \frac{\pi}{2}$. Par continuité des applications présentes , l vérifie

$$\begin{cases} l \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[\\ l = l^2\operatorname{cotan}(l) \end{cases}$$

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

,d'où $l=0$. On cherche un réel α tel que $\exists k\neq 0, \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}^{\alpha}-u_n^{\alpha}=k$. Or en effectuant un développement limité on obtient :

$$x^2\operatorname{cotan}(x) \underset{x\to 0+}{=} x-\frac{x^3}{3}+O\left(x^5\right)$$

$$u_{n+1}^{\alpha}-u_n^{\alpha}=\left(u_n-\frac{u_n^3}{3}+O\left(u_n^5\right)\right)^{\alpha}-u_n^{\alpha}=u_n^{\alpha}\left(\left(1-\frac{u_n^2}{3}+O\left(u_n^4\right)\right)^{\alpha}-1\right)$$

$u_{n+1}^{\alpha}-u_n^{\alpha}=-\frac{\alpha}{3}u_n^{\alpha+2}+O\left(u_n^{\alpha+4}\right)$,on choisit $\alpha=-2$, ce qui donne :

$$\frac{1}{u_{n+1}^2}-\frac{1}{u_n^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2}{3}$$

En appliquant soit Césaro , soit les sommations des relations de comparaison , on a

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant n}\frac{1}{u_{k+1}^2}-\frac{1}{u_k^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2}{3}n$$

Soit $\frac{1}{u_{n+1}^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2}{3}n$ et enfin

$$u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{3}{2n}}$$

Pour obtenir un terme de plus dans de développement , il faut connaître un équivalent de $\frac{1}{u_{n+1}^2}-\frac{1}{u_n^2}-\frac{2}{3}$ lorsque n tend vers l'infini. On a

$$x^2\operatorname{cotan}x\underset{x\to 0+}{=}x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{45}+O\left(x^7\right)$$

Après calculs :

$$\frac{1}{u_{n+1}^2}-\frac{1}{u_n^2}=\frac{1}{u_n^2}\left(\left(1-\frac{u_n^2}{3}-\frac{u_n^4}{45}+O\left(u_n^6\right)\right)^{-2}-1\right)=\frac{2}{3}+\frac{17}{45}u_n^2+O\left(u_n^4\right)$$

On a alors :

$$\frac{1}{u_{n+1}^2}-\frac{1}{u_n^2}-\frac{2}{3}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{17}{45}u_n^2$$

Or $u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{3}{2n}}$,donc

$$\frac{1}{u_{n+1}^2}-\frac{1}{u_n^2}-\frac{2}{3}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{17}{30n}$$

En réappliquant les relations de comparaison pour les séries positives divergentes , on obtient :

$$\frac{1}{u_n^2}-\frac{2}{3}(n-1)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{17}{30}\sum_{1\leqslant k\leqslant n-1}\frac{1}{k}$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Or on sait que $\sum_{1\leqslant k\leqslant n-1}\frac{1}{k}\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln(n-1)$,ce qui permet d'écrire :

$$\frac{1}{u_n^2}=\frac{2n}{3}+\frac{17}{30}\ln n+o(\ln n)$$

car $\ln(n-1)\underset{n\to+\infty}{\sim}\ln n$

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2n}{3}+\frac{17}{30}\ln n+o(\ln n)\right)}}$$

$$u_n=\sqrt{\frac{3}{2n}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{17}{20}\left(\frac{\ln n}{n}\right)+o\left(\frac{\ln n}{n}\right)}}\right)=\sqrt{\frac{3}{2n}}\left(1-\frac{17}{40}\left(\frac{\ln n}{n}\right)+o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right)$$

Soit

$$u_n=\sqrt{\frac{3}{2n}}-\frac{17}{40}\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}\right)+o\left(\frac{\ln n}{n\sqrt{n}}\right)$$

---

3 Solution de l'exercice 3. [E]

1) On remarque qu'il y a un facteur de plus au dénominateur , on peut dire que : $\forall k\in\mathbb{N},\sqrt{k}\leqslant 1+\sqrt{k}$,ce qui donne : $\forall n\in\mathbb{N}^*,u_n\leqslant\frac{1}{1+\sqrt{n}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}$, cela montre que u_n tend vers 0, si on veut montrer que $u_n=O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$, il faut gagner deux "crans", c'est à dire comparer $\sqrt{k}$ et $\sqrt{k-2}$ pour $k\geqslant 3$. $\sqrt{k}\ -\sqrt{k-2}=\frac{2}{\sqrt{k}\ +\sqrt{k-2}}$, or $\sqrt{k}\ +\sqrt{k-2}\geqslant\sqrt{3}+1>2$ pour $k\geqslant 3$. D'où :

$$\forall k\geqslant 3,\sqrt{k}\ <1+\sqrt{k-2}$$

Donc $0<\prod_{3\leqslant k\leqslant n-1}\sqrt{k}<\prod_{3\leqslant k\leqslant n-1}\left(1+\sqrt{k-2}\right)$, ce qui donne :

$$\forall n\geqslant 3,0<u_n<\frac{\sqrt{2}}{\left(1+\sqrt{n-2}\right)\left(1+\sqrt{n-1}\right)\left(1+\sqrt{n}\right)}$$

On a montré que:

$$u_n=O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

D'après les théorèmes de comparaison sur les séries à termes positifs , on en déduit que la série $\sum u_n$ est convergente .

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

2) On remarque $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{\sqrt{n}}{1+\sqrt{n+1}}$, soit

$$u_{n+1}\sqrt{n+1} - u_n\sqrt{n} = -u_{n+1}$$

On a affaire à une série télescopique , $\displaystyle\sum_{1\leqslant k\leqslant n-1}\left(u_{k+1}\sqrt{k+1} - u_k\sqrt{k}\right) = u_n\sqrt{n} - u_1$ D'où :

$$u_n\sqrt{n} - u_1 = -\sum_{1\leqslant k\leqslant n-1} u_{k+1}$$

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant n} u_k = 2u_1 + u_n\sqrt{n}$$

$u_n = O\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$,donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\sqrt{n} = 0$ et $u_1 = \dfrac{1}{2}$, donc :

$$\sum u_k = 1$$

3) Nous sommes dans le cas où $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$, la série est à termes positifs , on cherche un équivalent de $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$dans le but d'appliquer les sommations des relations de comparaison .Par calculs :

$$\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = -\frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

La série $\displaystyle\sum\frac{1}{\sqrt{n}}$ est une série de Riemann de signe constant divergente , on a :

$$-\ln u_{n+1} + \ln u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Par application des sommations de relations de comparaison , on en déduit que les sommes partielles sont équivalentes . Soit :

$$-\ln u_{n+1} + \ln u_1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{1\leqslant k\leqslant n} -\frac{1}{\sqrt{k}}$$

Or l'application $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ est positive , décroissante , de limite nulle , non intégrable , on sait que :

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_1^n \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

On en déduit que :

$$-\ln u_{n+1} + \ln u_1 \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n+1}$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

or $2\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n+1}$,donc : On obtient :

$$\ln u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -2\sqrt{n}$$

Pour pouvoir passer à l'exponentielle , il faut connaître une estimation de la différence $\ln u_n - (-2\sqrt{n})$. On pose $v_n = \ln u_n - (-2\sqrt{n})$,on forme la série dérivée $\sum v_{n+1} - v_n$. Or :

$$v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{12}(\frac{1}{n})^{(3/2)} + \frac{1}{20}(\frac{1}{n})^{(5/2)} + \mathrm{O}(\frac{1}{n^3})$$

La série $\sum \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}$ est une série convergente , d'où la suite v converge vers un réel L. On obtient alors :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^L e^{-\sqrt{n}}$$

---

4 Solution de l'exercice 4. [E]

1) On pose $V_{-1} = 0$, on obtient : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} u_k (V_k - V_{k-1})$ Ce qui donne ; $S_n = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} u_k V_k - \sum_{0\leqslant k\leqslant n-1} u_{k+1}V_k = u_n V_n + \sum_{1\leqslant k\leqslant n-1} (u_k - u_{k-1})V_k$.

2) $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sont des espaces complets , il suffit de montrer que la suite S est de Cauchy .

$$S_{n+p} - S_n = \sum_{n+1\leqslant k\leqslant n+p} u_k (V_k - V_{k-1}) = \sum_{n+1\leqslant k\leqslant n+p} u_k V_k - \sum_{n\leqslant k\leqslant n+p-1} u_{k+1}V_k$$

$S_{n+p} - S_n = \sum_{n+1\leqslant k\leqslant n+p-1} (u_k - u_{k+1})V_k + u_{n+p}V_{n+p} - u_{n+1}V_n$ Si on note M un majorant de la suite $|V|$,on obtient :$|S_{n+p} - S_n| \leqslant M\sum_{n+1\leqslant k\leqslant n+p-1} |(u_k - u_{k+1})| + M(|u_{n+p}| + |u_{n+1}|)$ Or la suite u est décroissante , donc $\sum_{n+1\leqslant k\leqslant n+p-1} |(u_k - u_{k+1})| = \sum_{n+1\leqslant k\leqslant n+p-1} (u_k - u_{k+1}) = u_{n+1} - u_{n+p}$ La suite u est décroissante de limite nulle , elle est donc positive , d'où :

$$|S_{n+p} - S_n| \leqslant 2Mu_{n+1}$$

La suite u est de limite nulle , on en déduit que la suite S est de Cauchy , elle est donc convergente car $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des espaces complets . En faisant tendre p vers l'infini ,on en déduit une majoration du reste :

$$\left|\sum_{n+1\leqslant k} u_k v_k\right| \leqslant 2Mu_{n+1}$$

3)

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \cos(2k) = \mathfrak{Re}\left(\sum_{1\leqslant k\leqslant n} e^{2ik}\right) = \mathfrak{Re}\left(e^{2i}\left(\frac{1-e^{2in}}{1-e^{2i}}\right)\right)$$

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Or

$$e^{2i}\left(\frac{1-e^{2in}}{1-e^{2i}}\right)=e^{i}\left(\frac{1-e^{2in}}{e^{-i}-e^{i}}\right)=e^{i}\left(\frac{1-e^{2in}}{-2i\sin 1}\right)$$

D'où :

$$\forall n\in\mathbb{N}^{*},\ |U_n|\leqslant\frac{1}{|\sin 1|}$$

La suite U est bornée , de plus la suite $k\mapsto\dfrac{1}{k^2}$ est réelle décroissante de limite nulle , on peut appliquer la transformation d'Abel , la série $\displaystyle\sum\frac{\cos 2k}{k^2}$ est une série convergente, de plus la valeur absolue de son reste est majorée par $\dfrac{2}{|\sin 1|}\left(\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)$ qui est bien de la forme $O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. On écrit que : $\forall k\in\mathbb{N},\sin^2 k=\dfrac{1-\cos 2k}{2}$,la série de terme général $\dfrac{1}{k^2}$ est convergente Riemannienne d'exposant 2 .On en déduit que la série de terme général $\dfrac{\sin^2 k}{k^2}$ est convergente comme somme de deux séries convergentes . De plus

$$R_n=\sum_{n+1\leqslant k}\frac{\sin^2 k}{k^2}=\sum_{n+1\leqslant k}\frac{1}{2k^2}-\sum_{n+1\leqslant k}\frac{\cos 2k}{2k^2}$$

Or $\dfrac{1}{2k^2}\underset{k\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}\right)$, les deux séries sont convergentes , positives , on en déduit par sommation des relations de comparaison que les restes sont équivalents ,

$$\sum_{n+1\leqslant k}\frac{1}{2k^2}\underset{k\to+\infty}{\sim}\sum_{n+1\leqslant k}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

On a de plus , $\displaystyle\sum_{n+1\leqslant k}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{2\,(n+1)}$,donc :

$$\sum_{n+1\leqslant k}\frac{1}{2k^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2n}$$

Soit la suite s définie par : $\forall n\in\mathbb{N}^{*},s_n=\displaystyle\sum_{n+1\leqslant k}\frac{1}{2k^2}-\frac{1}{2n}$, par développement limité , $s_{n+1}-s_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{2n^3}$, or en "intégrant " $\dfrac{1}{2n^3}\underset{n\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)$,d'où :

$$s_{n+1}-s_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

de nouveau par sommation des relations de comparaison , les restes sont équivalents , soit :

$$s_n\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{1}{4n^2}$$

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

On en déduit que $R_n = \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$,d'où la série de terme général R_n diverge comme somme d'une série divergente et d'une série convergente . Remarque : On pouvait aussi utiliser :

$$\sum_{n+1\leqslant k} \frac{1}{k^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$$

pour $\alpha > 1$.

5 Solution de l'exercice 5. [E]

Remarque générale : Dans les séries alternées , vous pouvez remarquer que quand on change k en $k+1$, le signe de $(-1)^k$ change .

1) On pose $u_n = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} (-1)^{k+1}\sqrt{k}$,on a : $u_n = \sum_{2\leqslant k\leqslant n+1} (-1)^k \sqrt{k-1}$,d'où :

$$u_n = \frac{1}{2}\left(\sum_{1\leqslant k\leqslant n} (-1)^{k+1}\sqrt{k} + \sum_{2\leqslant k\leqslant n+1} (-1)^k \sqrt{k-1}\right)$$

$$u_n = \frac{1}{2}\left(1 + (-1)^{n+1}\sqrt{n} + \sum_{2\leqslant k\leqslant n} (-1)^{k+1}\left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right)\right)$$

Or $\sqrt{k} - \sqrt{k-1} = \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}$,l'application $k \mapsto \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}$ est positive , décroissante de limite nulle , donc d'après le théorème spéciale des séries alternées , la série $\sum (-1)^{k+1}\left(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}\right)$ est convergente . D'où :

$$u_n = \frac{1}{2}\left((-1)^{n+1}\sqrt{n} + O(1)\right)$$

On a immédiatement :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}(-1)^{n+1}\sqrt{n}$$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n + u_{n+1}$,pour étudier la suite v on va étudier la série "dérivée", la série $\sum (v_{n+1} - v_n)$.

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+2} - u_n = (-1)^{n+2}\sqrt{n+2} - (-1)^{n+1}\sqrt{n} = (-1)^n\left(\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}\right)$$

La série dérivée vérifie le théorème spéciale des séries alternées , la série est $\sum (v_{n+1} - v_n)$ convergente , ce qui entraîne que la suite v converge vers un réel l .On sait que le reste $\sum_{1+n\leqslant k} w_k$ d'une série alternée est du signe de w_{n+1} et que $\left|\sum_{1+n\leqslant k} w_k\right| \leqslant |w_{n+1}|$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

$\sum_{1\leqslant k}(v_{k+1}-v_k)$ est du signe de v_2-v_1 et $\left|\sum_{1\leqslant k}(v_{k+1}-v_k)\right|\leqslant|v_2-v_1|$. Or

$$v_2-v_1=\frac{-2}{\sqrt{3}+1}=-\left(\sqrt{3}-1\right)$$

,on a

$$\sum_{1\leqslant k}(v_{k+1}-v_k)\geqslant\left(\sqrt{3}-1\right)$$

Ce qui donne encore : $l-v_1\geqslant\sqrt{3}-1$, ou $l\geqslant\sqrt{3}-1+1+1-\sqrt{2}$,soit :

$$l\geqslant 1+\sqrt{3}-\sqrt{2}>0$$

3) On a $u_{n+1}+u_n=l+o(1)$ et $u_{n+1}-u_n=(-1)^n\sqrt{n+1}$ On en déduit par soustraction :

$$2u_n=l+(-1)^{n+1}\sqrt{n+1}+o(1)$$

On en déduit que :

$$\frac{1}{u_n}=\frac{2}{\left(l+(-1)^{n+1}\sqrt{n+1}+o(1)\right)}=\frac{2(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}\left(1+\frac{(-1)^{n+1}l}{\sqrt{n+1}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)}$$

$$\frac{1}{u_n}=\frac{2(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\left(1-\frac{(-1)^{n+1}l}{\sqrt{n+1}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

$$\frac{1}{u_n}=\frac{2(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}-\frac{2l}{n+1}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

On en déduit que : $\frac{1}{u_n}-\frac{2(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{2l}{n+1}$ avec $l>0$ La série $\sum\left(\frac{1}{u_n}-\frac{2(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right)$ est divergente , or la série $\sum\left(\frac{2(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right)$ est convergente car elle vérifie le théorème spécial des séries alternées , on en déduit que la série $\sum\frac{1}{u_n}$ est divergente comme somme d'une série divergente et d'une série convergente .

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021