CH.26 : ELECTROSTATIQUE

Plan *(Cliquer sur le titre pour accéder au paragraphe)*

****

CH.26 : ELECTROSTATIQUE 1
I. NOTION DE CHAMP ELECTROSTATIQUE 2
I.1. LOI DE COULOMB 2
I.2. CHAMP CREE PAR UNE CHARGE PONCTUELLE 2
I.3. CHAMP CREE PAR UNE DISTRIBUTION DE CHARGES 3
I.3.1. Echelle d'observation mésoscopique 3
I.3.2. Distribution volumique de charges 3
I.3.3. Modèles surfacique et linéique 3
II. INVARIANCES ET SYMETRIES 4
II.1. EXEMPLES D'INVARIANCES 4
II.2. SYMETRIES ET ANTISYMETRIES 4
II.3. SITUATIONS A FORTE SYMETRIE 4
II.4. PRINCIPE DE CURIE 4
II.4.1. Enoncé du Principe 4
II.4.2. Application aux grandeurs vectorielles 4
III. NOTION DE POTENTIEL ELECTROSTATIQUE 5
III.1. CIRCULATION DU CHAMP ELECTROSTATIQUE 5
III.1.1. Définition 5
III.1.2. Propriétés 5
III.2. INTRODUCTION DU POTENTIEL 5
III.2.1. Définition 5
III.2.2. Lien entre les surfaces équipotentielles et les lignes de champ 6
III.2.3. Potentiel d'une distribution de charges 6
IV. ENERGIE POTENTIELLE D'UNE CHARGE DANS UN CHAMP 7
IV.1. CHARGE DANS UN CHAMP ELECTROSTATIQUE « EXTERIEUR » 7
IV.2. SYSTEME DE CHARGES EN INTERACTION 7
IV.2.1. Cas de 2 charges 7
IV.2.2. Cas de n charges 7
V. THEOREME DE GAUSS 7
V.1. ENONCE DU THEOREME 7
V.2. EXEMPLES D'APPLICATION DU THEOREME 8
V.2.1. Sphère chargée uniformément en volume 8
V.2.2. Plan uniformément chargé en surface 9
VI. NOTION DE DIPOLE ELECTROSTATIQUE 10
VI.1. CHAMP CREE PAR UN DIPOLE ELECTROSTATIQUE 10
VI.1.1. Définition d'un dipôle électrostatique 10
VI.1.2. Expression du potentiel créé 10
VI.1.3. Expression du champ créé 11
VI.1.4. Equation des lignes de champ 11
VI.2. ACTION D'UN CHAMP ELECTROSTATIQUE UNIFORME SUR UN DIPOLE 11
VI.3. ENERGIE POTENTIELLE D'UN DIPOLE DANS UN CHAMP EXTERIEUR 12
VII. FORMULATION LOCALE DE L'ELECTROSTATIQUE 12
VII.1. EQUATIONS DE MAXWELL DE L'ELECTROSTATIQUE 12

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

VII.2. LIEN AVEC LA FORMULATION INTEGREE 13
VII.3. RELATIONS DE PASSAGE POUR LE CHAMP ET LE POTENTIEL 13
VIII. CONDUCTEURS EN EQUILIBRE ELECTROSTATIQUE 13
VIII.1. PROPRIETES D'UN CONDUCTEUR A L'EQUILIBRE 13
VIII.1.1. Définitions 13
VIII.1.2. Propriétés 14
VIII.1.3. Théorème de Coulomb 14
VIII.2. PRESSION ELECTROSTATIQUE 14
VIII.3. CONDENSATEURS 15
VIII.3.1. Définition 15
VIII.3.2. Calculs de capacité 15
VIII.3.3. Energie électrostatique d'un condensateur plan 17

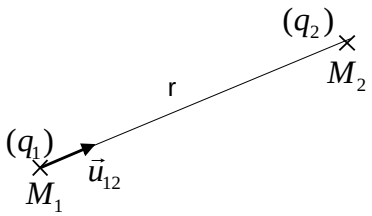
****

REMARQUE PRELIMINAIRE :

Le cadre de **l'électrostatique** est tel que les **sources** du champ électrique sont des **charges IMMOBILES** dans le référentiel d'étude. Le chapitre suivant sera consacré à la **magnétostatique**, où les sources du champ magnétique seront des **courants** (charges en mouvement) **PERMANENTS** (indépendants du temps). Cependant, le caractère **RELATIF** à un référentiel des notions « d'immobilité » et de « permanence » est évident : le chapitre 28 concernant **l'induction** (régimes variables) montrera le lien profond entre champ électrique et champ magnétique, et introduira la notion de « **champ électromagnétique** », entité qui sera, quant à elle, **invariante** par changement de référentiel.

I. NOTION DE CHAMP ELECTROSTATIQUE

I.1. LOI DE COULOMB



On s'intéresse aux forces électrostatiques apparaîssant entre 2 charges électriques **ponctuelles**; la loi de Coulomb s'écrit:

$$\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{M_1M_2^3}$$

Rq : des charges de même signe se repoussent, contrairement à des charges de signe opposé qui s'attirent.

I.2. CHAMP CREE PAR UNE CHARGE PONCTUELLE

Dans la situation précédente, nous allons considérer, dans un premier temps, que la charge q_2 subit « l'influence » de la charge q_1, qu'elle « teste » une grandeur dont q_1 est la source ; cette grandeur, définie en tout point de l'espace, sera appelée « **champ électrostatique** » créé par la charge ponctuelle q_1 et s'écrira :

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

$$\vec{E}_1(M_2)=\frac{\vec{F}_{1/2}}{q_2}=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_{12}=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{M_1M_2^{\,3}}$$

Rq : réciproquement, on pourra considérer que la charge ponctuelle q_2 est la source d'un champ électrostatique : $\vec{E}_2(M_1)=\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_{21}$.

I.3. CHAMP CREE PAR UNE DISTRIBUTION DE CHARGES

I.3.1. Echelle d'observation mésoscopique

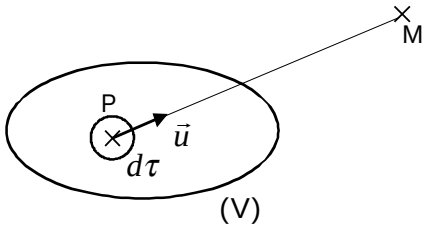
• Il est clair qu'à l'échelle **microscopique**, les charges sont discontinues et que les grandeurs telles que la densité volumique de charge ρ subissent de fortes variations spatiales.

Entre cette échelle et l'échelle **macroscopique** (la nôtre…), il existe une échelle intermédiaire appelée « échelle **mésoscopique** », où les volumes typiques sont de $1\mu m^3$.

En pratique, nous nous intéresserons à des grandeurs moyennées sur ces volumes : ces grandeurs seront « lissées » ou « nivelées », et leurs variations moins brutales.

• A notre échelle, si nous sommes capables de donner la valeur des champs $\vec{E}$, ρ … en tous les points distants de $1\mu m$ les uns des autres, nous aurons une description **quasi-continue** des champs étudiés.

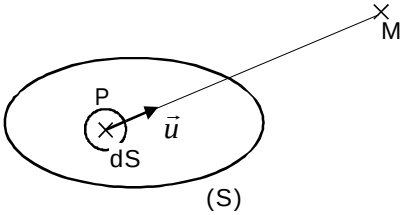
I.3.2. Distribution volumique de charges



$$\vec{E}(M)=\iiint_V \frac{\rho(P)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}d\tau$$

I.3.3. Modèles surfacique et linéique

• **modèle surfacique :** si l'une des dimensions de la distribution est très inférieure aux autres, on l'assimilera à une **surface chargée**, avec la notion de « densité surfacique de charge » σ :



$$\vec{E}(M)=\iint_S \frac{\sigma(P)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}dS$$

avec: $\sigma(P)=\frac{dq}{dS}$, en $C.m^{-2}$

• **modèle linéique** : pour une distribution filiforme, et avec des notations identiques, il vient, en introduisant λ = « densité linéique de charge » :

$$\vec{E}(M)=\int_C \frac{\lambda(P)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}dl$$

avec : $\lambda(P)=\frac{dq}{dl}$, en $C.m^{-1}$

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

II. INVARIANCES ET SYMETRIES

II.1. EXEMPLES D'INVARIANCES

• invariance d'une distribution par **rotation** autour d'un axe : en coordonnées cylindriques ou sphériques, le champ créé ne dépendra pas de l'angle servant à mesurer cette rotation (θ ou φ).

• invariance d'une distribution par **translation** le long d'un axe : le champ créé ne dépendra pas de la variable associée à cet axe.

II.2. SYMETRIES ET ANTISYMETRIES

• **plan de symétrie :** (Π) est un plan de symétrie d'une distribution si, pour tout point P de cette distribution, son symétrique P' porte la **même charge** que P (et appartient à la distribution).

• **plan d'antisymétrie :** (Π) est un plan d'antisymétrie d'une distribution si, pour tout point P de cette distribution, son symétrique P' porte une **charge opposée** à celle de P.

II.3. SITUATIONS A FORTE SYMETRIE

• **symétrie cylindrique :** si l'on a invariance par rotation et translation (autour et le long d'un axe), alors les grandeurs telles que le champ électrique ou la densité volumique de charge ne dépendront que de la variable r = distance par rapport à l'axe.

• **symétrie sphérique :** si l'on a invariance par rotation selon θ et φ (en coordonnées sphériques), les mêmes grandeurs ne dépendront que de r = distance par rapport à l'origine.

• **distribution unidimensionnelle :** en coordonnées cartésiennes, s'il y a invariance par translation selon 2 axes, les grandeurs rencontrées ne dépendront que de la variable associée au troisième axe.

II.4. PRINCIPE DE CURIE

II.4.1. Enoncé du Principe

« La symétrie des effets est au moins égale à celle des causes »

Rq : les effets peuvent être plus « symétriques » que les causes…

II.4.2. Application aux grandeurs vectorielles

Des grandeurs vectorielles, dont le sens ne dépend pas d'une convention d'orientation des rotations dans l'espace, obéissent au principe de Curie ; ceci aura plusieurs conséquences que nous exposerons en prenant le champ électrostatique pour exemple :

♦ Soit (Π) = plan de **symétrie** d'une distribution ; si $P' = sym\{P\}/(\Pi)$, alors :
$\vec{E}(P') = sym\{\vec{E}(P)\}/(\Pi)$

♦ Soit (Π) = plan d'**antisymétrie** d'une distribution ; si $P' = sym\{P\}/(\Pi)$, alors :
$\vec{E}(P') = -sym\{\vec{E}(P)\}/(\Pi)$

♦ Soit (Π) un plan de **symétrie** de la distribution passant par le point M où l'on veut déterminer le champ électrostatique, alors : $\vec{E}(M) \in (\Pi)$

♦ Soit (Π) un plan d'**antisymétrie** de la distribution passant par le point M où l'on désire calculer le champ, alors : $\vec{E}(M) \perp (\Pi)$

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Rq1 : $\vec{v}$ (= vecteur vitesse), $\vec{a}$ (= vecteur accélération), $\vec{F} = m\vec{a}$, $\vec{E} = \vec{F}/q$ obéissent au principe de Curie : on dit qu'ils ont un caractère « **polaire** » (dans le « jargon » des physiciens, on parle de « vrais vecteurs »).

Rq2 : y aurait-il donc de « faux » vecteurs ? Si l'on considère le moment cinétique d'un point matériel de masse m par rapport à un point O, on a : $\vec{\sigma}_o = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}$; le résultat de ce produit vectoriel dépend d'une **convention**. Ainsi, le sens de rotation a une signification « physique », mais le sens de $\vec{\sigma}_o$ n'en a pas.

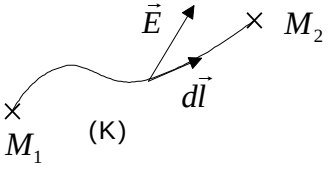
Des vecteurs **liés à une convention d'orientation des rotations dans l'espace** (comme $\vec{\Omega}$ = vecteur rotation instantanée, ou le champ magnétique $\vec{B}$ défini par un **produit vectoriel** à partir d'un « vrai » vecteur selon : $\vec{F}_B = q\vec{v} \wedge \vec{B}$) sont de type « **axial** » : on parle également de « **pseudo-vecteur** ». Nous verrons plus loin (chapitre 27) qu'ils suivent d'autres règles de symétrie.

III. NOTION DE POTENTIEL ELECTROSTATIQUE

III.1. CIRCULATION DU CHAMP ELECTROSTATIQUE

III.1.1. Définition

La circulation du champ $\vec{E}$ sur une courbe (K) est définie par :



$$C_{(K)}(M_1 \to M_2) = \int_{M \in (K)} \vec{E}(M) \cdot d\vec{l}$$

Rq : la circulation d'une **force** représente son **travail**.

III.1.2. Propriétés

• On peut montrer, à partir de constatations expérimentales, que la circulation du champ $\vec{E}$ entre les points M_1 et M_2 ne **dépend pas du chemin suivi** (c'est-à-dire de la courbe (K)) : on dit que $\vec{E}$ est à « **circulation conservative** ».
• Cette circulation ne dépendant que des points de départ et d'arrivée, elle sera **nulle** sur une courbe fermée, appelée « **contour** » ; d'où, pour un contour noté (C), la relation :

$$\oint_{M \in (C)} \vec{E}(M) \cdot d\vec{l} = 0$$

III.2. INTRODUCTION DU POTENTIEL

III.2.1. Définition

• Par définition, nous poserons : $C(M_1 \to M_2) = V(M_1) - V(M_2) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$ (1)

où V sera le **potentiel** électrostatique dont « dérive » le champ $\vec{E}$.

• Ainsi, pour M_1 et M_2 voisins, on a : $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l}$

• Pour relier $\vec{E}$ à V de manière **intrinsèque** et **locale**, nous allons définir un nouvel opérateur appelé « **GRADIENT** » (noté $\overrightarrow{grad}$) tel que :

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

$\boxed{dV = \overrightarrow{grad}V \cdot d\vec{l}}$ $\Rightarrow$ par identification, il vient : $\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V}$ (2)

Rq : la relation (2) est vraie en tout point de l'espace, c'est en ce sens qu'elle est « locale » (son caractère « intrinsèque » vient du fait qu'elle est écrite sans référence aucune à un système de coordonnées particulier) ; la relation (1) en est la forme « intégrée » : dans la suite du cours de physique, nous retrouverons souvent cette dualité entre forme locale et forme intégrée d'un même théorème.

• **Coordonnées cartésiennes :** $\left| \begin{array}{l} d\vec{l} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z \\ dV = \dfrac{\partial V}{\partial x}dx + \dfrac{\partial V}{\partial y}dy + \dfrac{\partial V}{\partial z}dz \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{grad}V = \dfrac{\partial V}{\partial x}\vec{e}_x + \dfrac{\partial V}{\partial y}\vec{e}_y + \dfrac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z}$

Coordonnées cylindriques : $d\vec{l} = dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{grad}V = \dfrac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \dfrac{\partial V}{\partial z}\vec{e}_z}$

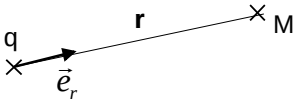
III.2.2. Lien entre les surfaces équipotentielles et les lignes de champ

Considérons deux points M et M' voisins et appartenant à une même surface équipotentielle ; on a alors : $V(M') - V(M) = dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ (où $d\vec{l} = \overrightarrow{MM'}$) $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{E} \perp d\vec{l}}$

En tout point M, la ligne de champ qui passe par M est donc **perpendiculaire** à l'équipotentielle passant par ce point.

III.2.3. Potentiel d'une distribution de charges

• **charge ponctuelle :** en coordonnées sphériques, nous pouvons écrire :



$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r = -\overrightarrow{grad}V = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r = -\frac{dV}{dr}\vec{e}_r$$

(le champ étant porté par $\vec{e}_r$, les dérivées partielles $\dfrac{\partial V}{\partial \theta}$ et $\dfrac{\partial V}{\partial \varphi}$ sont nulles : ceci est cohérent avec les invariances par rotation en θ et φ).

Après intégration et en prenant $V(\infty) = 0$ (possible lorsqu'il n'y a pas de charges à l'infini), on a :

$$\boxed{V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

• **distributions de charges :** avec les mêmes notations qu'au paragraphe 1.3, il vient :

♦ *distribution volumique :* $\boxed{V(M) = \iiint_V \frac{\rho(P)d\tau}{4\pi\varepsilon_0 r}}$

♦ *distribution surfacique :* $\boxed{V(M) = \iint_S \frac{\sigma(P)dS}{4\pi\varepsilon_0 r}}$

♦ *distribution linéique :* $\boxed{V(M) = \int_C \frac{\lambda(P)dl}{4\pi\varepsilon_0 r}}$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

IV. ENERGIE POTENTIELLE D'UNE CHARGE DANS UN CHAMP

IV.1. CHARGE DANS UN CHAMP ELECTROSTATIQUE « EXTERIEUR »

• Soit une charge q placée au point M dans un champ électrostatique $\vec{E}$; considérons le travail de la force électrique s'exerçant sur cette charge pour un déplacement élémentaire $\vec{dl}$:

$\delta W_{\vec{F}} = q\vec{E}(M)\cdot\vec{dl} = -q\overrightarrow{grad}V\cdot\vec{dl} = -qdV(M)$, où $V(M)$ est le potentiel électrostatique en M.

• On sait que l'on peut « construire » une énergie potentielle à partir du travail d'un opérateur, s'opposant à celui de la force considérée, en écrivant :

$dE_P = \delta W_{op} = -\delta W_{\vec{F}} = qdV \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_P = qV(M)}$ (à une constante près)

IV.2. SYSTEME DE CHARGES EN INTERACTION

IV.2.1. Cas de 2 charges

On considère 2 charges q_1 et q_2 distantes de r_{12} ; chaque charge ressent le potentiel créé par la deuxième (potentiel exprimé au paragraphe 3.2.3). Par symétrie, on aura :

$$\boxed{E_{P1} = E_{P2} = E_P = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}}$$ (on parle d'énergie potentielle « **d'interaction** »)

IV.2.2. Cas de n charges

• En notant r_{ij} la distance entre 2 charges quelconques q_i et q_j, il vient :

$$\boxed{E_P = \sum_{\substack{(i,j)\\ i\neq j}} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}}$$

• On peut également écrire, en faisant attention à ne pas compter 2 fois le même terme d'énergie potentielle :

$$\boxed{E_P = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} q_i V_i} \quad \text{avec :} \quad \boxed{V_i = \sum_{\substack{j=1\\ (j\neq i)}}^{n} \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}}$$ (V_i est le potentiel ressenti par la charge q_i)

Rq : la notion d'énergie potentielle électrostatique est très pratique pour déterminer les positions d'équilibre stables et/ou instables d'une particule chargée.

V. THEOREME DE GAUSS

V.1. ENONCE DU THEOREME

On considère une surface **fermée** (S), limitant un volume (V), orientée vers **l'extérieur** et renfermant des charges; on montre que le flux du champ électrique créé par la distribution de charges à travers (S) peut se calculer par :

$$\boxed{\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}}$$

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Rq1 : dans le cas d'une distribution volumique, on a : $q_{\text{int}} = \iiint_{P\in V} \rho(P)d\tau$

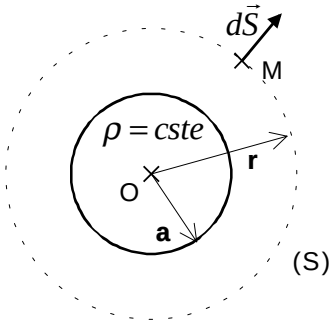
Rq2 : l'analogie formelle entre le champ de gravitation $\vec{g}$ et le champ électrique permet d'établir un « théorème de Gauss » pour la gravitation, soit :

$$\oiint_S \vec{g}\cdot d\vec{S} = -4\pi G m_{\text{int}}$$

(où G est la constante universelle de la gravitation et m_{int} la masse contenue dans le volume V ; le signe « moins » vient du fait que 2 charges de même nature se repoussent alors que 2 masses de même signe s'attirent).

V.2. EXEMPLES D'APPLICATION DU THEOREME

V.2.1. Sphère chargée uniformément en volume



Soit une sphère de rayon a, uniformément chargée en volume; nous allons calculer le champ électrostatique créé par cette sphère, à l'intérieur et à l'extérieur de celle-ci

• **Topologie du champ :**

♦ *Invariances* : la distribution est invariante par rotation selon θ et φ $\Rightarrow$ le champ ne dépend que de r (coordonnées sphériques).

♦ *Symétries* : tout plan contenant la droite OM est plan de symétrie ; le champ devant appartenir à l'intersection de tous ces plans est donc porté par $\vec{e}_r$; en résumé : $\boxed{\vec{E} = E(r)\vec{e}_r}$

• **Théorème de Gauss :** de manière générale, il faut trouver une « bonne » surface de Gauss, c'est-à-dire une surface sur laquelle le produit scalaire $\vec{E}\cdot d\vec{S}$ est **simple** à calculer ; en choisissant une sphère de centre O et de rayon r, le produit scalaire se ramène à un produit simple et le module de $\vec{E}$ sera **constant**, ce qui nous autorisera à le sortir de l'intégrale ; d'où :

♦ $r \le a$: $\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oiint_S E(r)\times dS = E(r)\times\oiint_S dS = E(r)4\pi r^2 = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\times\frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\vec{e}_r}$

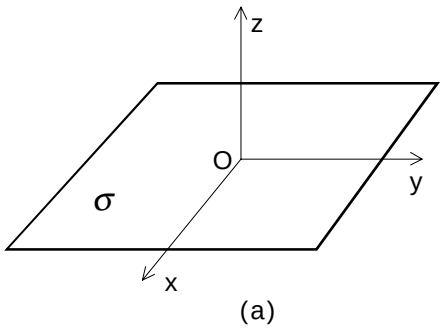
♦ $r \ge a$: $4\pi r^2 E(r) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\times\frac{4}{3}\pi a^3 \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r}$

Rq : on constate que le champ électrique est **continu** en r=a (où il vaut $\frac{\rho a}{3\varepsilon_0}$) ; cette continuité du champ électrique (et du potentiel) est une propriété générale des **distributions volumiques**.

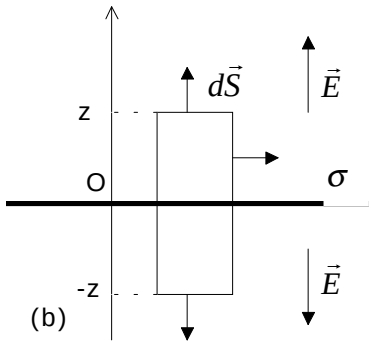
 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

V.2.2. Plan uniformément chargé en surface



(a)



(b)

• **Topologie du champ** :

♦ *Invariances* : le plan étant illimité, il y a invariance par translation selon x et y ⇒ le champ ne dépend **que de z**.

♦ *Symétries* : le plan étant illimité, tout plan parallèle à xOz est plan de symétrie de la distribution ; il en est de même pour tout plan parallèle à yOz. Le champ appartient donc à l'intersection de ces plans et est porté par $\vec{e}_z$; en résumé : $\boxed{\vec{E} = E(z)\vec{e}_z}$

Rq : xOy étant plan de symétrie, $\vec{E}$ est changé en son symétrique lors d'une symétrie par rapport à ce plan ⇒ $\boxed{\vec{E}(-z) = -\vec{E}(z)}$

• **Théorème de Gauss :** nous allons choisir pour surface de Gauss l'enveloppe d'un cylindre droit de section (S), d'axe Oz et s'étendant entre z et –z (voir figure (b)). Remarquons que sur les surfaces de base du cylindre, $\vec{E}$ et $d\vec{S}$ sont **colinéaires**, alors que sur la surface latérale $\vec{E} \perp d\vec{S} = 0$; enfin, la charge intérieure au cylindre est contenue sur la portion de surface S du plan chargé et vaut σS puisque σ est constante. On peut alors écrire :

$$\oiint_{cyl} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iint_{bases} E(z)\times dS = E(z)\times \iint_{bases} dS = 2ES = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_z} \quad \text{(pour z>0)}$$

Rq1 : on constate qu'en définitive, le champ électrique **ne dépend pas de z** : cela peut sembler surprenant, mais il faut remarquer que le plan étant illimité, on voit ses « extrémités » sous un angle solide de 2π stéradians, ceci **quel que soit le point M de l'axe Oz** (il y a donc bien invariance par translation selon z).

Rq2 : quand on franchit le plan z=0, on observe que : $\boxed{\vec{E}(0^+) - \vec{E}(0^-) = [\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} - (-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0})]\vec{e}_z = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_z}$

Cette **discontinuité** du champ électrique à la traversée d'une **surface chargée** est **générale** (le potentiel, quant à lui, reste continu).

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

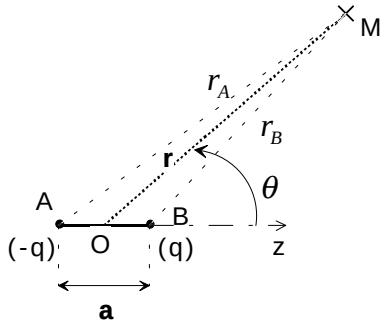
VI. NOTION DE DIPOLE ELECTROSTATIQUE

VI.1. CHAMP CREE PAR UN DIPOLE ELECTROSTATIQUE

VI.1.1. Définition d'un dipôle électrostatique

• Un dipôle électrostatique est constitué de 2 charges ponctuelles immobiles de **signe opposé,** séparées par une distance **très inférieure** aux distances où l'on calculera le champ créé par ce dipôle pour déterminer l'interaction du dipôle avec d'autres charges éventuelles.

• Nous travaillerons en **coordonnées sphériques** et adopterons les notations suivantes :



On a la relation: $a \ll r$

On définit la grandeur: $\boxed{\vec{p} = q\overrightarrow{AB} = qa\vec{e}_z}$

="**moment dipolaire**" (en $C.m$)

• La notion de dipôle électrique est d'une grande importance, en particulier en chimie où l'étude des interactions entre molécules fera appel à cette notion. En réalité, les phénomènes sont plus complexes, car, en général , il y a plus de 2 charges mises en jeu : les points A et B correspondront alors aux **barycentres** des charges « moins » et des charges « plus ».

• Nous appellerons « **dipôle rigide** » un dipôle où les grandeurs a et q restent sensiblement constantes au cours de l'étude : ce sera le cas des molécules polaires ($\|\vec{p}\|$ est alors constant) par opposition aux molécules apolaires mais polarisables (on parlera alors de « dipôle induit »).

VI.1.2. Expression du potentiel créé

• **Invariances et symétries :** le dipôle est invariant par rotation autour de l'axe z $\Rightarrow$ le potentiel et le champ ne dépendront que de r et θ. Le plan zOM est plan de symétrie $\Rightarrow \vec{E} \in$ ce plan ; d'où : $\boxed{V = V(r,\theta) \quad \text{et:} \quad \vec{E} = E_r(r,\theta)\vec{e}_r + E_\theta(r,\theta)\vec{e}_\theta}$ $(E\varphi = 0)$

• On a donc : $V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A})$; par ailleurs :

$$r_A^2 = (r\sin\theta)^2 + (\frac{a}{2} + r\cos\theta)^2 = r^2 + ar\cos\theta + \frac{a^2}{4} = r^2(1 + \frac{a}{r}\cos\theta + \frac{a^2}{4r^2})$$

Un développement limité au **1er ordre** en 1/r conduit à :

$r_A \simeq r(1 + \frac{a\cos\theta}{2r})$; de même, on trouve : $r_B \simeq r(1 - \frac{a\cos\theta}{2r})$. Il vient alors :

$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}[(1 - \frac{a\cos\theta}{2r})^{-1} - (1 + \frac{a\cos\theta}{2r})^{-1}]$; au premier ordre, on obtient :

$$V(M) \simeq \frac{qa\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V(M) = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p}\cdot\overrightarrow{OM}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}$$

Rq : le potentiel d'un dipôle électrostatique est donc en $\frac{1}{r^2}$ et décroît donc **plus vite** que celui d'une charge ponctuelle.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

VI.1.3. Expression du champ créé

• Nous pouvons calculer le champ grâce à la relation locale entre champ et potentiel :

$$\vec{E}(M) = -\overrightarrow{grad}V = -\frac{\partial V}{\partial r}\vec{e}_r - \frac{1}{r}\times\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{e}_\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{E}(M) = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{e}_r + \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{e}_\theta}$$

• Il est possible de donner une expression **intrinsèque** du champ ; on montre que :

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{3(\vec{p}\cdot\overrightarrow{OM})\overrightarrow{OM} - r^2\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^5}} \quad \text{(avec : } r = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|\text{)}$$

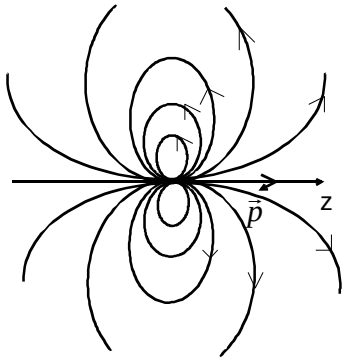
VI.1.4. Equation des lignes de champ

• Les lignes de champ sont de révolution autour de l'axe Oz ; nous allons tracer ces lignes dans un plan méridien et utiliser les coordonnées polaires (r,θ). Ecrivons que le champ $\vec{E}$ et un déplacement élémentaire $d\vec{l}$ le long d'une ligne sont **colinéaires** :

$$\vec{E} \,\|\, d\vec{l} \;\Rightarrow\; \frac{dr}{E_r} = \frac{rd\theta}{E_\theta} \Rightarrow \frac{dr}{2\cos\theta} = \frac{rd\theta}{\sin\theta} \Rightarrow \frac{dr}{r} = 2\frac{d(\sin\theta)}{\sin\theta} \Rightarrow Ln(r) = Ln[\sin^2(\theta)] + cste \;\Rightarrow$$

$$\boxed{r = K\sin^2(\theta)} \quad \text{(où K est une constante >0)}$$

• **Tracé :** l'allure des lignes de champ est la suivante :



Rq: dans un plan méridien, les lignes **équipotentielles** sont normales aux lignes de champ et ont pour équation:

$$\boxed{r^2 = K'\cos\theta}$$

VI.2. ACTION D'UN CHAMP ELECTROSTATIQUE UNIFORME SUR UN DIPOLE

• La résultante des forces est donnée par : $\boxed{\vec{F}_{ext} = q\vec{E}_{ext} + (-q)\vec{E}_{ext} = \vec{0}}$ ($\vec{E}_{ext}(A) = \vec{E}_{ext}(B)$, car le champ est uniforme).

• Le moment résultant en O s'écrit : $\vec{\Gamma}_o^{ext} = \overrightarrow{OA}\wedge(-q)\vec{E}_{ext} + \overrightarrow{OB}\wedge q\vec{E}_{ext} = q\overrightarrow{AB}\wedge\vec{E}_{ext} \Rightarrow \boxed{\vec{\Gamma}_{ext} = \vec{p}\wedge\vec{E}_{ext}}$

(les actions d'un champ électrique extérieur sur un dipôle rigide se réduisent à un **couple**, qui ne dépend pas du point d'application O choisi).

Rq : si le champ extérieur n'est **pas uniforme** (mais ne varie « pas trop » à l'échelle du dipôle), on montre que, dans le cadre de l'approximation dipolaire, le moment garde la même expression ($\vec{E}_{ext}$ étant une valeur « typique » du champ sur le dipôle, en O par exemple) et qu'il apparaît une résultante de force non nulle : $\boxed{\vec{F}_{ext} = (\vec{p}\cdot\overrightarrow{grad})\vec{E}_{ext}}$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

VI.3. ENERGIE POTENTIELLE D'UN DIPOLE DANS UN CHAMP EXTERIEUR

• Par sommation des énergies potentielles des 2 charges très proches l'une de l'autre, il vient :

$$\boxed{E_P = -\vec{p}\cdot\vec{E}_{ext}} \quad \text{(à une constante près)}$$

Rq : cette expression est valable même si le champ extérieur n'est pas uniforme.

• **Positions d'équilibre :** les positions d'équilibre sont données par E_P **extremum**, donc pour $\vec{p}$ et $\vec{E}_{ext}$ **colinéaires** (dans ce cas, on a bien $\vec{\Gamma}_{ext} = \vec{0}$).

♦ *équilibre stable* : E_P est **minimum** $\Rightarrow$ $\vec{p}$ et $\vec{E}_{ext}$ sont de **même** sens

♦ *équilibre instable* : E_P est **maximum** $\Rightarrow$ $\vec{p}$ et $\vec{E}_{ext}$ sont de sens **contraire**

Remarque sur la notion de dipôle : dans le cas d'une distribution de charges de **somme nulle**, le potentiel peut se mettre sous la forme d'un « **développement multipolaire** » :

$$V(r,\theta) = \frac{A(\theta)}{r^2} + \frac{B(\theta)}{r^3} + \frac{C(\theta)}{r^4} + \ldots$$

Le terme en $1/r^3$ est le terme **quadrupolaire** (voir l'exercice 26.1), le terme en $1/r^4$ est appelé « **octupolaire** » etc…(si la somme des charges n'était pas nulle, on aurait un terme en $1/r$ de type « **monopolaire** »). L'approximation consistant à assimiler des molécules polaires à de simples dipôles sera d'autant mieux vérifiée que le terme en $1/r^2$ sera **prépondérant**, donc que les molécules seront très éloignées les unes des autres, donc que la matière étudiée sera moins condensée.

VII. FORMULATION LOCALE DE L'ELECTROSTATIQUE

Remarque préliminaire : ce paragraphe appartient au cours de **Spé** et fait appel à de nouveaux outils mathématiques (opérateurs, relations et théorèmes d'analyse vectorielle…).

VII.1. EQUATIONS DE MAXWELL DE L'ELECTROSTATIQUE

• Dans le cadre de l'électrostatique (charges fixes), Maxwell a postulé les équations suivantes :

$$\boxed{div\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}} \quad \text{(Maxwell-Gauss)} \quad \text{et :} \quad \boxed{\overrightarrow{rot}\vec{E} = \vec{0}} \quad \text{(Maxwell-Faraday)}$$

• « div » est l'opérateur **divergence** et « $\overrightarrow{rot}$ » est l'opérateur **rotationnel** ; ils sont à connaître **uniquement** en coordonnées **cartésiennes**, soit :

$$\boxed{div\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}} \quad \text{et :} \quad \boxed{\overrightarrow{rot}\vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{e}_z}$$

Rq : pour avoir une théorie complète, il faut aussi postuler la **loi de force** de Lorentz $\vec{F}_E = q\vec{E}$.

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

VII.2. LIEN AVEC LA FORMULATION INTEGREE

Les relations d'analyse vectorielle permettent d'écrire :

- $\overrightarrow{rot}\vec{E} = \vec{0} \Leftrightarrow \exists V$ tel que: $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$
- $div\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \iiint_V div\vec{E}\,d\tau = \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \dfrac{\rho d\tau}{\varepsilon_0} = \dfrac{q_{int}}{\varepsilon_0}$

(on retrouve le théorème de Gauss, après application du théorème de Green-Ostrogradski).

- $div\vec{E} = div(-\overrightarrow{grad}V) = -\Delta V = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$ ou : $\boxed{\Delta V + \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} = 0}$ (= équation de Poisson)

Rq1 : « Δ » est l'opérateur **laplacien scalaire**, donné en coordonnées cartésiennes par :

$$\boxed{\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}}$$

Rq2 : la résolution de l'équation de Poisson est le potentiel coulombien, du type: $V = \iiint \dfrac{\rho d\tau}{4\pi\varepsilon_0 r}$

Rq3 : dans une région **vide de charge**, on a : $\boxed{\Delta V = 0}$ (équation de Laplace).

VII.3. RELATIONS DE PASSAGE POUR LE CHAMP ET LE POTENTIEL

• **Distribution volumique de charges :** $\boxed{\vec{E} \text{ et } V \text{ sont } \textbf{continus}}$ à la traversée de la surface délimitant la distribution.

• **Distribution surfacique de charges :** considérons une surface chargée (densité surfacique de charge $=\sigma$), séparant 2 milieux (1) et (2) ; soit $\vec{n}_{12}$ la normale locale à la surface, **orientée de (1) vers (2)**. Juste de part et d'autre de cette surface, on a la relation de passage :

$\boxed{\vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{12}}$ (la composante **tangentielle** du champ est donc **continue** à la traversée).

Quant à lui, le potentiel $\boxed{V \text{ reste } \textbf{continu}}$ lors de cette traversée.

• **Distribution linéique de charges** : $\boxed{\vec{E} \text{ et } V \textbf{ divergent} \text{ sur le « fil »}}$.

VIII. CONDUCTEURS EN EQUILIBRE ELECTROSTATIQUE

Remarque préliminaire : ce paragraphe fait partie du **programme MP**, mais utilise les seules notions introduites précédemment ; dans l'exemple simple du condensateur **plan**, nous établirons une formule permettant de calculer la densité volumique d'énergie électrostatique : nous admettrons son caractère très général et la rappellerons dans le chapitre 29.

VIII.1. PROPRIETES D'UN CONDUCTEUR A L'EQUILIBRE

VIII.1.1. Définitions

• Conducteur : c'est un corps à l'intérieur duquel des charges peuvent se déplacer sous l'action d'une force aussi petite soit-elle.

• Equilibre électrostatique : un conducteur sera à l'équilibre si, à l'échelle mésoscopique, les **charges sont fixes** (à l'échelle microscopique, ces charges pourront cependant avoir un mouvement désordonné).

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

VIII.1.2. Propriétés

- $\boxed{\vec{E}_{int} = \vec{0}}$ (si le champ intérieur n'était pas nul, une force mettrait les charges en mouvement)
- $\boxed{V_{int} = cste}$ (relation obtenue en écrivant : $\vec{E}_{int} = -\overrightarrow{grad} V_{int}$)
- $\boxed{\rho_{int} = 0}$ (par application du théorème de Gauss à une sphère de rayon r→0, entourant un point hypothétique où ρ_{int} serait non nulle)
- Le champ électrostatique au voisinage extérieur d'un conducteur à l'équilibre lui est **NORMAL** (la surface limitant le conducteur est une **équipotentielle** $\Rightarrow \vec{E}_{ext} \perp$ à la surface)

Rq : un conducteur à l'équilibre ne peut donc porter que des charges **surfaciques** (en fait, contenues à l'intérieur d'une couche de faible épaisseur).

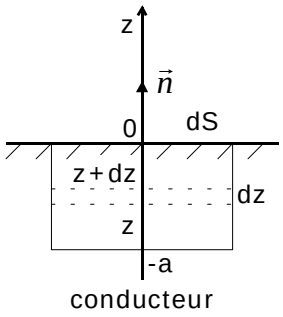
VIII.1.3. Théorème de Coulomb

En appliquant la relation de passage du paragraphe VII.3, et en tenant compte du fait que $\vec{E}_{int} = \vec{0}$, on trouve pour le champ au voisinage extérieur d'un conducteur à l'équilibre :

$\boxed{\vec{E}_{ext} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{ext}}$ (σ est la densité surfacique de charges et $\vec{n}_{ext}$ la normale orientée vers **l'extérieur**)

VIII.2. PRESSION ELECTROSTATIQUE

Nous allons considérer un modèle de conducteur où les charges sont réparties sur une couche d'épaisseur a très faible ; sur cette couche, le champ électrostatique passe progressivement de la valeur nulle (intérieur d'un conducteur) à la valeur $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$. Raisonnons sur la figure ci-dessous :



Nous admettrons que dans la couche chargée:

$\vec{E} = E(z)\vec{e}_z$

Par ailleurs, la charge contenue dans le cylindre droit de hauteur a et de base dS vaut:

$\delta q = \int_{-a}^{0} \rho(z) dS dz = \sigma dz$

Ce qui permet d'établir: $\boxed{\sigma = \int_{-a}^{0} \rho(z) dz}$

• Appliquons le théorème de Gauss au cylindre élémentaire de base dS et de hauteur dz . Le flux latéral est nul, et l'on remarque que $d\vec{S}(z) = -dS\vec{e}_z$ et $d\vec{S}(z+dz) = dS\vec{e}_z$; il vient alors :

$$[E(z+dz) - E(z)] \times dS = \frac{\delta q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\rho dS dz}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{\frac{dE(z)}{dz} = \frac{\rho(z)}{\varepsilon_0}}$$

• La force électrostatique totale s'exerçant sur le cylindre de base dS et de hauteur a vaut alors :

$$d\vec{F}_E = \int_{cyl} \vec{E}(z)\delta q = \int_{-a}^{0} \vec{E}(z)\rho dS dz = \int_{-a}^{0} \vec{E}(z)\varepsilon_0 \times \frac{dE}{dz} \times dS dz = \varepsilon_0 dS\vec{n} \times \int_{E(-a)}^{E(0)} E(z) dE(z) = \frac{\varepsilon_0 dS\vec{n}}{2} [E^2(z)]_{-a}^{0}$$

$\Rightarrow d\vec{F}_E = \frac{\sigma^2 dS}{2\varepsilon_0}\vec{n}$; on posera : $\boxed{p_E = \frac{d\vec{F}_E}{dS\vec{n}} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}}$ = « **pression électrostatique** »

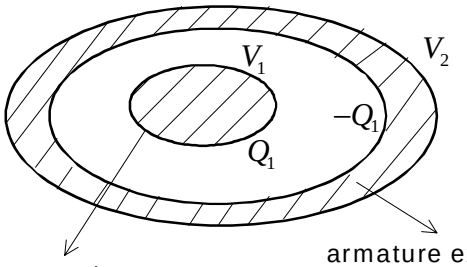
 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Rq : quel que soit le signe de σ, la force de pression électrostatique est dirigée vers **l'extérieur**, et tend donc à arracher les charges surfaciques.

VIII.3. CONDENSATEURS

VIII.3.1. Définition

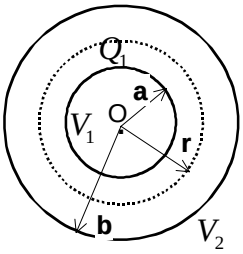


On appelle **condensateur** un système de 2 conducteurs, dont l'un est creux et entoure complètement l'autre.
L'espace séparant les 2 armatures peut être vide ou rempli d'un isolant ("diélectrique").
Les faces en regard portent des charges opposées.

On pose : $\boxed{Q_1 = C(V_1 - V_2)}$ où C est la **capacité** du condensateur en Farad (F) (C>0)

VIII.3.2. Calculs de capacité

• **Condensateur sphérique :**



Les symétries et les invariances donnent:

$\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$

Le théorème de Gauss appliqué à une sphère de centre O, de rayon r conduit à:

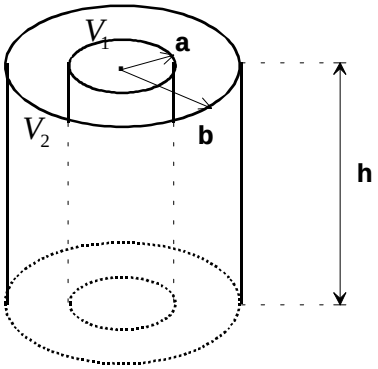
$\vec{E} = \dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$

La méthode est alors générale : on fait **circuler** le champ d'une armature à l'autre. D'où :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V \Rightarrow E_r = -\frac{\partial V(r)}{\partial r} = -\frac{dV}{dr} \Rightarrow V_1 - V_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0} \times \int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0} \times \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

Or : $Q_1 = C(V_1 - V_2) \Rightarrow \boxed{C = 4\pi\varepsilon_0 \times \frac{ab}{b-a}}$ (1)

• **Condensateur cylindrique :**



On considère 2 cylindres illimités et coaxiaux.
On cherche la capacité d'un tronçon de hauteur h.
Les symétries et les invariances nous donnent:

$\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$ (r=distance à l'axe)

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

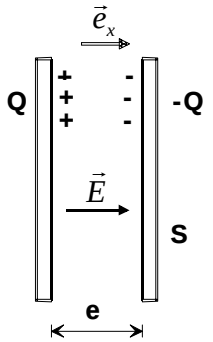
Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

On applique le théorème de Gauss à un cylindre de rayon r (a ≤ r ≤ b) et de hauteur h, en remarquant que le flux à travers les surfaces de base sera nul ($\vec{E} \perp d\vec{S}$) et que sur la surface latérale, $\vec{E}$ et $d\vec{S}$ sont colinéaires ; enfin, on se servira du fait que le module de $\vec{E}$ est constant sur cette même surface latérale, ce qui conduit à :

$$\oiint_{cyl} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iint_{s.lat} E(r)\times dS = E(r)2\pi rh = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{Q_1}{\varepsilon_0} \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 hr}\vec{e}_r$$

Circulation entre les 2 armatures : $V_1 - V_2 = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 h}\int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{Q_1}{2\pi\varepsilon_0 h}\times Ln(b/a) \Rightarrow \boxed{C = \frac{2\pi\varepsilon_0 h}{Ln(b/a)}}$ (2)

• **<u>Condensateur plan</u> :**



On considère que: $e \ll \sqrt{S}$

En négligeant les "effets de bord", les invariances et les symétries permettent d'écrire:

$\vec{E} = E(x)\vec{e}_x$

Appliquons l'équation de Laplace entre les armatures (vide de charges) ; il vient :

$\Delta V = 0 = \frac{d^2V(x)}{dx^2}$ (puisque les grandeurs sont invariantes par translation selon x et y) ;or :

$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V \Rightarrow E_x = -\frac{dV}{dx} = cste$; on détermine la constante sachant que le champ à la surface des armatures vaut : $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$

La circulation du champ permet d'obtenir : $V_1 - V_2 = E\times e = \frac{Q\times e}{\varepsilon_0 S} \Rightarrow \boxed{C = \frac{\varepsilon_0 S}{e}}$

Rq1 : la formule ci-dessus est à retenir ; si, entre les armatures, il y a un diélectrique (isolant) de permittivité relative ε_r, la formule devient : $\boxed{C = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{e}}$ (ε_r étant supérieure à 1, on a ainsi la possibilité d'augmenter la capacité du condensateur ; pour de fortes valeurs de C, il faut que e soit la plus petite possible : pour $V_1 - V_2$ fixée, le module du champ va augmenter ainsi que les forces qui s'exercent sur les charges liées du diélectrique ⇒ il faudra veiller à ce que ce dernier ne « claque » pas, c'est-à-dire qu'il reste isolant).

Rq2 : lorsque la distance qui sépare les armatures est **faible** devant les dimensions du condensateur, on peut poser : b=a+e, avec e/a≪1 ; on peut alors développer les expressions (1) et (2) au premier ordre en e/a, soit :

♦ (1) : posons $R = a + e/2 = b - e/2$ (R= rayon « moyen » du condensateur sphérique) ⇒

$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{(R-e/2)(R+e/2)}{e} \Rightarrow \boxed{C \simeq \frac{\varepsilon_0\times 4\pi R^2}{e}}$ ⇒ on retrouve la **formule du condensateur plan** avec : $S = 4\pi R^2$.

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

♦ (2) : $\boxed{C=\dfrac{2\pi\varepsilon_0 h}{Ln(1+e/a)}\simeq\dfrac{\varepsilon_0\times 2\pi a h}{e}}$ ⇒ on retrouve la même formule avec : $S=2\pi a h$

VIII.3.3. Energie électrostatique d'un condensateur plan

• En électrocinétique, nous avons vu que l'énergie emmagasinée par un condensateur était de la forme : $W_C=\dfrac{1}{2}CU^2$, où U est la tension aux bornes du condensateur.

• Pour un condensateur plan, nous avons noté que : $V_1-V_2=U=E\times e$ et: $C=\dfrac{\varepsilon_0 S}{e}$; alors :

$W_C=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\varepsilon_0 S}{e}\times E^2e^2=\dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2}\times eS$; eS représente le **volume** délimité par les armatures ⇒

la **densité volumique d'énergie électrostatique** s'écrit : $\boxed{w_E=\dfrac{\varepsilon_0 E^2}{2}}$ (en $J.m^{-3}$)

• On admettra la **validité générale** de cette expression, même lorsque le régime sera non permanent ; en régime variable, les phénomènes magnétiques seront liés aux phénomènes électriques, il faudra alors tenir compte de la densité volumique d'énergie magnétique.

****

CONCLUSION : pour calculer un champ électrostatique, nous disposons de 3 méthodes :

1) calcul direct par : $\vec{E}=\iiint_V\dfrac{\rho d\tau}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}$ (calcul **vectoriel** ⇒ attention aux projections…)

2) calcul du potentiel par : $V=\iiint_D\dfrac{\rho d\tau}{4\pi\varepsilon_0 r}$, puis : $\vec{E}=-\overrightarrow{gradV}$ (le 1er calcul est **scalaire**)

3) par le **théorème de Gauss** : recommandé dans les situations à **forte symétrie** !

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021