Séries à termes positifs : Niveau 1

Exercice 1 [I] [S]

Équivalent quand n tend vers $+\infty$ de

$$S_n = 1^1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n$$

Exercice 2 [I] [S]

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}^*$ telle qu'il existe une constante non nulle ℓ vérifiant

$$\sum_{k=0}^{n} u_k^2 \sim \frac{\ell}{u_n}$$

1) Montrer que la série $\sum u_n^2$ est divergente

2) On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k^2$. En compararant les sommes partielles de la série de terme général $u_n^2 S_n^2$ à une intégrale, trouver un équivalent de u_n quand n tend vers l'infini.

Exercice 3 [I] [S]

Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$ selon les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 4 [I] [S]

Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_n \sin \pi \left(n^\alpha + 1\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ selon les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [E]

☞ Montrer que $\sum_{k=1}^{n-1} k^k$ est négligeable devant n^n quand n tend vers $+\infty$.

Indication pour l'exercice 2 [E]

☞ Si la série $\sum u_n^2$ converge, u_n tend vers 0.

☞ Comparer $\sum_{k=0}^{n} u_n^2 S_n^2$ à $\int_{S_0}^{S_n} x^2 \, \mathrm{d}x$.

Indication pour l'exercice 3 [E]

☞ Faire un développement asymptotique quand n tend vers $+\infty$ de $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$

Indication pour l'exercice 4 [E]

☞ Faire un développement asymptotique quand n tend vers $+\infty$ de $u_n = \sin \pi \left(n^\alpha + 1\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ et discuter selon la position de α par rapport à 1.

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [E]

La suite de terme général k^k est croissante donc $S_n = 1^1+2^2+3^3+\cdots+n^n = n^n+(n-1)^{n-1}+r_n$ où $r_n \leqslant (n-2)(n-2)^{n-2} < (n-1)^{n-1}$. On a donc $0 < S_n - n^n < 2(n-1)^{n-1} = o\left(n^n\right)$ quand n tend vers $+\infty$. Donc $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n$.

Corrigé de l'exercice 2 [E]

1) Si la série à termes strictement positifs $\sum u_n^2$ était convergente elle aurait pour somme un réel non nul s tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ell}{s}$ et alors la condition nécessaire de convergence vers 0 pour la suite de terme général u_n^2 ne saurait être réalisée.

La série à termes positifs $\sum u_n^2$ est donc divergente et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ell}{\sum\limits_{k=0}^{n} u_k^2}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

2) $\displaystyle\int_{S_{n-1}}^{S_n} x^2 \mathrm{d}x \leqslant u_n^2 S_n^2 \leqslant \int_{S_n}^{S_{n+1}} x^2 \mathrm{d}x$, donc $\displaystyle\int_{S_0}^{S_n} x^2 \mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} u_k^2 S_k^2 \leqslant \int_{S_1}^{S_{n+1}} x^2 \mathrm{d}x$. Or les deux membres extrêmes de cette inégalité sont, d'après 1), des infiniment grands équivalents à $\dfrac{S_n^3}{3}$ quand n tend vers l'infini (en effet $S_{n+1} = S_n+u_n^2 = S_n+o(S_n) \sim S_n$). Par hypothèse la suite de terme général $u_k^2 S_k^2$ converge vers $\ell^2 \neq 0$, donc (théorème de sommation d'équivalents en cas de séries à termes positifs et divergentes) :

$$\frac{S_n^3}{3} \sim \sum_{k=1}^{n} u_k^2 S_k^2 \sim n\ell^2 \sim \frac{\ell^3}{3u_n^3}.$$

On en conclut que $\quad u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt[3]{\dfrac{\ell}{3n}}$.

Corrigé de l'exercice 3 [E]

Puisque $\alpha > 0$, on a le développement asymptotique quand n tend vers $+\infty$:

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}} = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}} - \frac{1}{2n^{\frac{3\alpha}{2}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{3\alpha}{2}}}\right).$$

On a donc $u_n = v_n + w_n$ où $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$ est le terme général d'une série alternée convergente ($|v_n|$ tend vers 0 en décroissant) et $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^{\frac{3\alpha}{2}}}$. Le critère de Riemann montre que la série $\sum u_n$ est convergente si et seulement si $\alpha > \dfrac{2}{3}$.

Corrigé de l'exercice 4 [E]

Puisque $\alpha > 0$, on a le développement asymptotique quand n tend vers $+\infty$:

$$(n^\alpha + 1)^{\frac{1}{\alpha}} = n\left(1 + \frac{1}{\alpha n^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)\right) = n + \frac{1}{\alpha n^{\alpha-1}} + O\left(\frac{1}{n^{2\alpha-1}}\right)$$

- Si $\alpha > 1$, $u_n = \sin \pi\left(n^\alpha+1\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \dfrac{(-1)^n\pi}{\alpha n^{\alpha-1}}+O\left(\dfrac{1}{n^{2\alpha-1}}\right)\cdot$ On peut donc écrire $u_n = v_n+w_n$ où $u_n = \dfrac{(-1)^n\pi}{\alpha n^{\alpha-1}}$ est le terme général d'une série alternée convergente ($|v_n|$ tend vers 0 en décroissant) et $w_n = O\left(\dfrac{1}{n^{2\alpha-1}}\right)\cdot$ Comme $2\alpha - 1 > 1$, le critère de Riemann et le théorème de domination montrent que la série $\sum w_n$ est absolument convergente. Il en résulte que notre série $\sum u_n$ est convergente lorsque $\alpha > 1$.
- Si $0 < \alpha < 1$, $u_n = \sin \pi\left(n^\alpha+1\right)^{\frac{1}{\alpha}} = (-1)^n \sin\theta_n$ où $\theta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi n^{1-\alpha}}{\alpha}\cdot$ Dans ces conditions $|u_n|$ ne converge pas vers 0 et la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente.
- si $\alpha = 1$, $u_n = \sin \pi\left(n+1\right)$ est le terme général de la série nulle.

En résumé notre série converge si et seulement si $\alpha \geqslant 1$.