Séries à termes positifs : Niveau 1

Exercice 1 [I] [S]

Équivalent quand n tend vers $+\infty$ de

$$S_n = 1^1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n$$

Exercice 2 [I] [S]

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{R}^*$ telle qu'il existe une constante non nulle ℓ vérifiant

$$\sum_{k=0}^{n} u_k^2 \sim \frac{\ell}{u_n}$$

1) Montrer que la série $\sum u_n^2$ est divergente

2) On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k^2$. En compararant les sommes partielles de la série de terme général $u_n^2 S_n^2$ à une intégrale, trouver un équivalent de u_n quand n tend vers l'infini.

Exercice 3 [I] [S]

Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$ selon les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 4 [I] [S]

Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_n \sin \pi\left(n^\alpha + 1\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ selon les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [E]

☞ Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k^k$ est négligeable devant n^n quand n tend vers $+\infty$.

Indication pour l'exercice 2 [E]

☞ Si la série $\sum u_n^2$ converge, u_n tend vers 0.

☞ Comparer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_n^2 S_n^2$ à $\displaystyle\int_{S_0}^{S_n} x^2\,\mathrm{d}x$.

Indication pour l'exercice 3 [E]

☞ Faire un développement asymptotique quand n tend vers $+\infty$ de $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha + (-1)^n}}$

Indication pour l'exercice 4 [E]

☞ Faire un développement asymptotique quand n tend vers $+\infty$ de $u_n = \sin \pi\left(n^\alpha + 1\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ et discuter selon la position de α par rapport à 1.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [E]

La suite de terme général k^k est croissante donc $S_n = 1^1+2^2+3^3+\cdots+n^n = n^n+(n-1)^{n-1}+r_n$ où $r_n \leqslant (n-2)(n-2)^{n-2} < (n-1)^{n-1}$. On a donc $0 < S_n - n^n < 2(n-1)^{n-1} = o\left(n^n\right)$ quand n tend vers $+\infty$. Donc $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n$.

Corrigé de l'exercice 2 [E]

1) Si la série à termes strictement positifs $\sum u_n^2$ était convergente elle aurait pour somme un réel non nul s tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ell}{s}$ et alors la condition nécessaire de convergence vers 0 pour la suite de terme général u_n^2 ne saurait être réalisée.

La série à termes positifs $\sum u_n^2$ est donc divergente et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ell}{\sum\limits_{k=0}^{n} u_k^2}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

2) $\displaystyle\int_{S_{n-1}}^{S_n} x^2\mathrm{d}x \leqslant u_n^2S_n^2 \leqslant \int_{S_n}^{S_{n+1}} x^2\mathrm{d}x$, donc $\displaystyle\int_{S_0}^{S_n} x^2\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} u_k^2S_k^2 \leqslant \int_{S_1}^{S_{n+1}} x^2\mathrm{d}x$. Or les deux membres extrêmes de cette inégalité sont, d'après 1), des infiniment grands équivalents à $\dfrac{S_n^3}{3}$ quand n tend vers l'infini (en effet $S_{n+1} = S_n+u_n^2 = S_n+o(S_n) \sim S_n$). Par hypothèse la suite de terme général $u_k^2S_k^2$ converge vers $\ell^2 \neq 0$, donc (théorème de sommation d'équivalents en cas de séries à termes positifs et divergentes) :

$$\frac{S_n^3}{3} \sim \sum_{k=1}^{n} u_k^2S_k^2 \sim n\ell^2 \sim \frac{\ell^3}{3u_n^3}\cdot$$

On en conclut que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt[3]{\dfrac{\ell}{3n}}\cdot$

Corrigé de l'exercice 3 [E]

Puisque $\alpha > 0$, on a le développement asymptotique quand n tend vers $+\infty$:

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^\alpha+(-1)^n}} = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}}\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}} - \frac{1}{2n^{\frac{3\alpha}{2}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{3\alpha}{2}}}\right)\cdot$$

On a donc $u_n = v_n + w_n$ où $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$ est le terme général d'une série alternée convergente ($|v_n|$ tend vers 0 en décroissant) et $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^{\frac{3\alpha}{2}}}\cdot$ Le critère de Riemann montre que la série $\sum u_n$ est convergente si et seulement si $\alpha > \dfrac{2}{3}\cdot$

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Corrigé de l'exercice 4 [E]

Puisque $\alpha > 0$, on a le développement asymptotique quand n tend vers $+\infty$:

$$\left(n^\alpha + 1\right)^{\frac{1}{\alpha}} = n\left(1 + \frac{1}{\alpha n^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)\right) = n + \frac{1}{\alpha n^{\alpha-1}} + O\left(\frac{1}{n^{2\alpha-1}}\right)$$

- Si $\alpha > 1$, $u_n = \sin\pi\left(n^\alpha+1\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \dfrac{(-1)^n\pi}{\alpha n^{\alpha-1}} + O\left(\dfrac{1}{n^{2\alpha-1}}\right)$. On peut donc écrire $u_n = v_n + w_n$ où $u_n = \dfrac{(-1)^n\pi}{\alpha n^{\alpha-1}}$ est le terme général d'une série alternée convergente ($|v_n|$ tend vers 0 en décroissant) et $w_n = O\left(\dfrac{1}{n^{2\alpha-1}}\right)$. Comme $2\alpha - 1 > 1$, le critère de Riemann et le théorème de domination montrent que la série $\sum w_n$ est absolument convergente. Il en résulte que notre série $\sum u_n$ est convergente lorsque $\alpha > 1$.
- Si $0 < \alpha < 1$, $u_n = \sin\pi\left(n^\alpha+1\right)^{\frac{1}{\alpha}} = (-1)^n \sin\theta_n$ où $\theta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi n^{1-\alpha}}{\alpha}$. Dans ces conditions $|u_n|$ ne converge pas vers 0 et la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente.
- si $\alpha = 1$, $u_n = \sin\pi\left(n+1\right)$ est le terme général de la série nulle.

En résumé notre série converge si et seulement si $\alpha \geqslant 1$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021