Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Donner une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui soit formée de matrices inversibles.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Calculer l'inverse de la matrice carrée A définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Préciser si la matrice carrée A définie par $A = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible.

Si elle est inversible, calculer A^{-1}.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

Calculer l'inverse de la matrice carrée A définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ddots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & n-1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & 0 & \ddots & 1 & 2 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Montrer que H contient au moins une matrice inversible.

Exercice 6 [Indication] [Correction]

On considère la matrice carrée A définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Calculer A^2 et A^3. Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 7 [Indication] [Correction]

(*Théorème de Hadamard*)
Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ de terme général a_{ij}.
On dit que A est à diagonale strictement dominante si, pour tout j, $|a_{jj}| > \sum_{i \neq j} |a_{ij}|$.

Montrer que dans ce cas la matrice A est inversible.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ conviennent.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Soit J la matrice telle que $A = I - aJ$. Calculer J^2, J^3, J^4.
En déduire $A^{-1} = I + aJ + a^2J^2 + a^3J^3$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Si $b = 0$, c'est facile. On suppose donc $b \neq 0$.
Noter J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients valent 1.
Exprimer A en fonction de I et J. En déduire $A(A - (nb - 2b + 2a)I) = (b - a)(b(n - 1) + a)I$.
En déduire que si $a = b$ ou Si $a = (1 - n)b$, la matrice A n'est pas inversible.
Sinon, A est inversible. On trouve $\frac{a+(n-2)b}{d}$ sur la diagonale, $-\frac{b}{d}$ ailleurs.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

A est inversible car triangulaire à coefficients diagonaux non nuls.
Soit J la matrice de terme général $J_{i,j} = 1$ si $j = i + 1$ et 0 sinon.
Observer que $A = I + 2J + 3J^2 + \cdots + nJ^{n-1}$.
Montrer que $nM^{n+1} - (n + 1)M^n + I = (I - M)^2(I + 2M + 3M^2 + \cdots + nM^{n-1})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
En déduire $A^{-1} = I - 2J + J^2$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

On considère les matrices E_{ij} de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Supposer qu'il existe un couple (i, j) avec $i \neq j$, tel que $\varphi(E_{ij}) \neq 0$.
Considérer alors les matrices $A = \mathrm{I}_n + \alpha E_{ij}$.
Sinon, considérer $A = E_{1n} + E_{21} + E_{32} + \cdots + E_{n,n-1}$.

Indication pour l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

Remarquer que $A^3 = 6A - 4I$. En déduire $A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - 6I) = \cdots$

Indication pour l'exercice 7 [Retour à l'énoncé]

Se donner une matrice-colonne X de composantes x_j, et telle que $AX = 0$.
Soit x_i une composante de X de module maximum.
Montrer que $|a_{ii}x_i| \leq |x_i| \sum_{j \neq i}^{n} |a_{ij}|$. En déduire $x_i = 0$.

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Il suffit de prendre $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$.

Ces quatre matrices (inversibles) forment une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ (de dim. 4) car elles sont libres.

En effet $aA+bB+cC+dD=0 \Rightarrow \begin{cases} a+b=0, & a-b=0\\ c+d=0, & c-d=0\end{cases} \Rightarrow a=b=c=d$

Corrigé de l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Posons $J=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$. On a $J^2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$, $J^3=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ et $J^4=0$.

On a $I=I-a^4J^4=(I-aJ)(I+aJ+a^2J^2+a^3J^3)=A(I+aJ+a^2J^2+a^3J^3)$.

On en déduit que l'inverse de A est $A^{-1}=I+aJ+a^2J^2+a^3J^3=\begin{pmatrix}1&a&a^2&a^3\\0&1&a&a^2\\0&0&1&a\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Si $b=0$, on a $A=aI$: dans ce cas A est inversible$\Leftrightarrow a\neq 0$ et alors $A^{-1}=\frac{1}{a}I$.

On suppose donc $b\neq 0$. Notons J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients valent 1.

On a $A=(a-b)I+bJ$. D'autre part, il est clair que $J^2=nJ$. On en déduit :

$$\begin{aligned}A^2 &= (a-b)^2I+2b(a-b)J+b^2J^2=(a-b)^2I+b(2(a-b)+nb)J\\ &= (a-b)^2I+(2(a-b)+nb)(A-(a-b)I)\\ &= (2(a-b)+nb)A+(b-a)(b(n-1)+a)I\end{aligned}$$

On a donc obtenu l'égalité : $A(A-(nb-2b+2a)I)=(b-a)(b(n-1)+a)I \quad (1)$

◇ Si $a=b$ (donc si $A=bJ$), alors $A(A-nbI)=0$.

◇ Si $a=(1-n)b$ (donc si $A=b(J-nI)$), alors $A(A+nbI)=0$.

Dans ces deux cas, la matrice A est un diviseur de zéro. Elle n'est donc pas inversible.

Sinon, c'est-à-dire si $a\notin\{b,(1-n)b\}$, posons $d=(a-b)(b(n-1)+a)$.

L'égalité (1) montre que A est inversible et : $A^{-1}=\dfrac{1}{d}(-A+(nb-2b+2a)I)$.

Posons $K=J-I$ (diagonale nulle, les autres coefficients valant 1.)

Avec ces notations on a $A=aI+bK$ et on en déduit : $A^{-1}=\dfrac{a+(n-2)b}{d}I-\dfrac{b}{d}K$.

Ainsi les coefficients diagonaux de A^{-1} valent $\dfrac{a+(n-2)b}{d}$, les autres sont égaux à $-\dfrac{b}{d}$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Corrigé de l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

La matrice A est inversible car triangulaire à coefficients diagonaux non nuls.

Soit J la matrice de terme général $J_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Seuls les coefficients de J situés juste au-dessus de la diagonale sont $\neq 0$ (ils valent 1.)

On connait les puissances de J, on sait que $J^n = 0$, et on a $A = I + 2J + 3J^2 + \cdots + nJ^{n-1}$.

Pour tout x réel distinct de 1, on a :

$$1 + 2x + \cdots + nx^{n-1} = (1 + x + x^2 + \cdots + x^n)' = \left(\frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}\right)' = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$$

L'égalité $nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1 = (1-x)^2(1 + 2x + \cdots + nx^{n-1})$ est vraie pour tout $x \neq 1$.

En fait c'est une identité valable dans toute algèbre, et en particulier dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, elle devient $nM^{n+1} - (n+1)M^n + I = (I-M)^2(I + 2M + 3M^2 + \cdots + nM^{n-1})$.

Avec $M = J$, on obtient $I = (I-J)^2 A$.

On en déduit le résultat : $A^{-1} = (I-J)^2 = I - 2J + J^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \ddots & 1 & -2 & 1 \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & 1 & -2 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Corrigé de l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Si on suit les indications de l'énoncé, on comprend qu'il va falloir construire une matrice inversible M telle que $\varphi(M) = 0$, M étant construite à l'aide de matrices E_{ij}.

Pour tout couple (i,j) avec $i \neq j$, et tout scalaire α, la matrice $A = \mathrm{I}_n + \alpha E_{ij}$ est inversible (car elle est triangulaire et ses coefficients diagonaux valent 1).

Avec ces notations, on a $\varphi(A) = \varphi(\mathrm{I}_n) + \alpha\varphi(E_{ij})$.

Supposons $\varphi(E_{ij}) \neq 0$. On constate que si $\alpha = -\dfrac{\varphi(\mathrm{I}_n)}{\varphi(E_{ij})}$, alors $\varphi(A) = 0$.

On a donc prouvé que s'il existe un couple (i,j), avec $i \neq j$, tel que $\varphi(E_{ij}) \neq 0$, alors il existe une matrice inversible A telle que $\varphi(A) = 0$.

Il reste à traiter le cas où φ s'annule sur toutes les matrices E_{ij} avec $i \neq j$.

Considérons alors la matrice $A = E_{1n} + E_{21} + E_{32} + \cdots + E_{n,n-1}$.

Cette matrice est inversible (elle diffère de I_n par l'échange des colonnes 1 et n.)

Puisque par hypothèse φ s'annule sur toutes les E_{ij} avec $i \neq j$, il est clair que $\varphi(A) = 0$.

Conclusion : dans tous les cas, on a trouvé une matrice inversible A telle $\varphi(A) = 0$.

L'hyperplan $H = \operatorname{Ker}\varphi$ contient donc au moins une matrice inversible.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Corrigé de l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

On trouve $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 2 & -6 & -6 \\ 6 & -6 & 2 & -6 \\ 6 & -6 & -6 & -10 \end{pmatrix}$.

On remarque que $A^3 = 6A - 4I$. Ainsi $A(A^2 - 6I) = 4I$.

On en déduit que A est inversible et que $A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - 6I) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Corrigé de l'exercice 7 [Retour à l'énoncé]

La matrice A est inversible si le seul vecteur colonne X tel $AX = 0$ est $X = 0$.

Notons $x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n$ les composantes de X, et x_i une composante de module maximum.

Si $AX = 0$ alors la composante d'indice i de AX est nulle.

Ainsi : $0 = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = a_{ii}x_i + \sum_{j\neq i}^{n} a_{ij}x_j$ donc $|a_{ii}x_i| = \left|\sum_{j\neq i}^{n} a_{ij}x_j\right| \leq \sum_{j\neq i}^{n} |a_{ij}x_j| \leq |x_i| \sum_{j\neq i}^{n} |a_{ij}|$.

Il en découle $|x_i| \left(|a_{ii}| - \sum_{j\neq i}^{n} |a_{ij}|\right) \leq 0$. Mais $|a_{ii}| - \sum_{j\neq i}^{n} |a_{ij}| > 0$. On en déduit $|x_i| = 0$.

Or x_i est une composante de module maximum dans X. On a donc $X = 0$.

Conclusion : la matrice A est inversible.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021