

Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Caractériser $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

EXERCICE 2 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Dans \mathbb{R}^3 , soient (Π) le plan d'équation $x + 2y + 3z = 0$ et (D) la droite $\begin{cases} x = 3z \\ y = 2z \end{cases}$.
Déterminer la matrice A de la projection sur (Π) parallèlement à (D) .

EXERCICE 3 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Calculer l'inverse et les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 4 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

On se donne $(\alpha, \beta, \gamma) \neq \vec{0}$ dans \mathbb{R}^3 .
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, dont la matrice est $A = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

Trouver le rang de f , son image, son noyau. Calculer A^n pour tout n de \mathbb{N}^* .

EXERCICE 5 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions respectives n et p .

Soit f une application linéaire de E vers F , de rang r .

On définit $\mathcal{G} = \{g \in \mathcal{L}(F, E), f \circ g \circ f = 0\}$.

Montrer que \mathcal{G} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(F, E)$ et en donner la dimension.

EXERCICE 6 [[Indication](#)] [[Correction](#)]

Soient $(e), (\varepsilon)$ deux bases de E ($\dim E = n$), et $(e^*), (\varepsilon^*)$ leurs bases duales.

Soit P la matrice de passage de (e) à (ε) et P^* celle de (e^*) à (ε^*) .

Exprimer P en fonction de P^* .

Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [[Retour à l'énoncé](#)]

Vérifier que $A^2 = A$. Montrer que f est la projection sur le plan d'équation $x + y + z = 0$, parallèlement à la droite engendrée par $c = (1, 1, 1)$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [[Retour à l'énoncé](#)]

$$\text{On trouve } A = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 7 & -6 & -9 \\ -2 & 6 & -6 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [[Retour à l'énoncé](#)]

Se placer dans $\mathbb{R}_4[X]$, muni de la base $1, X, X^2, X^3, X^4$.
Vérifier que A est la matrice de l'application $f : P(X) \mapsto P(X + 1)$.
Utiliser ensuite le fait que $f^n(P(X)) = P(X + n)$ pour tout n de \mathbb{Z} .

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [[Retour à l'énoncé](#)]

L'image de f est la droite engendrée par (α, β, γ) .

$\text{Ker } f$ est le plan d'équation $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$.

Pour calculer A^n , on utilisera les matrices $(\alpha \ \beta \ \gamma)$ et $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [[Retour à l'énoncé](#)]

Considérer un supplémentaire F' de $\text{Im } f$ dans F , et un supplémentaire E' de $\text{Ker } f$ dans E .

Munir E et F de bases adaptées à ces sommes directes.

Caractériser alors les éléments de \mathcal{G} par leur matrice dans ce couple de bases.

En déduire que $\dim \mathcal{G} = np - r^2$.

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 [[Retour à l'énoncé](#)]

Constater que le coefficient d'indice (i, j) de P est $e_i^*(\varepsilon_j)$.

Montrer que celui-ci est aussi le terme d'indice (j, i) de la matrice de passage Q^* de (ε^*) à (e^*) .

En déduire l'égalité $P^* = {}^t P^{-1}$.

Corrigés des exercices

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

On constate que $A^2 = A$. Ainsi f est une projection vectorielle.

Il reste à déterminer le noyau et les vecteurs invariants de f .

$$u = (x, y, z) \in \text{Ker } f \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \Leftrightarrow x = y = z. \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$u = (x, y, z) \in \text{Inv } f \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 3x \\ -x + 2y - z = 3y \Leftrightarrow x + y + z = 0. \\ -x - y + 2z = 3z \end{cases}$$

Conclusion : L'application f est la projection vectorielle :

- ◇ Sur plan vectoriel d'équation $x + y + z = 0$, engendré par les vecteurs $\begin{cases} a = (1, -1, 0) \\ b = (1, 0, -1) \end{cases}$
- ◇ Parallèlement à la droite engendrée par le vecteur $c = (1, 1, 1)$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Soit $u(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $v = p(u) = (x', y', z')$. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v = u + \lambda(3, 2, 1)$.

On écrit que v est dans (II) : $x' + 2y' + 3z' = 0$ donc $\lambda = -\frac{1}{10}(x + 2y + 3z)$.

Ainsi $(x', y', z') = (x, y, z) - \frac{1}{10}(x + 2y + 3z)(3, 2, 1)$.

$$\text{On en déduit } \begin{cases} x' = \frac{1}{10}(7x - 6y - 9z) \\ y' = \frac{1}{10}(-2x + 6y - 6z) \\ z' = \frac{1}{10}(-x - 2y + 7z) \end{cases} \text{ Donc } A = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 7 & -6 & -9 \\ -2 & 6 & -6 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

L'idée est d'associer à la matrice A une application linéaire f très simple.

On se place dans $\mathbb{R}_4[X]$, muni de la base canonique $1, X, X^2, X^3, X^4$.

On constate que $\begin{cases} f(1) = 1, f(X) = 1 + X \\ f(X^2) = 1 + 2X + X^2 = (1 + X)^2, \end{cases} \begin{cases} f(X^3) = (1 + X)^3 \\ f(X^4) = (1 + X)^4 \end{cases}$

Par linéarité, on en déduit, pour tout polynôme : $f(P(X)) = P(X + 1)$.

Il est clair que f est un automorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$, et que $f^{-1}(P(X)) = P(X - 1)$.

Il est tout aussi clair que, pour tout n de \mathbb{Z} , $f(P(X)) = P(X + n)$.

$$\text{Ainsi } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et, } \forall n \in \mathbb{Z}, A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n^2 & n^3 & n^4 \\ 0 & 1 & 2n & 3n^2 & 4n^3 \\ 0 & 0 & 1 & 3n & 6n^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4 [[Retour à l'énoncé](#)]

On note $\varepsilon = (\alpha, \beta, \gamma)$. Notons $(e) = e_1, e_2, e_3$ la base canonique de \mathbb{R}^3 .

On constate que $f(e_1) = \alpha\varepsilon$, $f(e_2) = \beta\varepsilon$ et $f(e_3) = \gamma\varepsilon$.

Ainsi les $f(e_k)$ (qui engendrent $\text{Im } f$) sont dans la droite $\mathbb{K}\varepsilon$ dirigée par ε .

Puisque $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$, l'un au moins des $f(e_k)$ est non nul.

Ainsi l'application f est de rang 1 et $\text{Im } f = \mathbb{K}\varepsilon$.

Soit $u(x, y, z)$ dans \mathbb{R}^3 On a $f(u) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(\alpha x + \beta y + \gamma z) = 0 \\ \beta(\alpha x + \beta y + \gamma z) = 0 \\ \gamma(\alpha x + \beta y + \gamma z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha x + \beta y + \gamma z = 0$.

Ainsi $\text{Ker } f$ est le plan de \mathbb{R}^3 d'équation $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$.

On a $A = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} (\alpha \quad \beta \quad \gamma)$. D'autre part $(\alpha \quad \beta \quad \gamma) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$.

On en déduit : $A^2 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)A$, puis : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{n-1}A$.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE 5 [[Retour à l'énoncé](#)]

$\mathcal{G} \neq \emptyset$ car $g = 0$ convient. Soient g_1, g_2 dans $\mathcal{L}(F, E)$, et α_1, α_2 dans \mathbb{K} . On a :

$$f \circ (\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2) \circ f = f \circ (\alpha_1 g_1 \circ f + \alpha_2 g_2 \circ f) = \alpha_1 f \circ g_1 \circ f + \alpha_2 f \circ g_2 \circ f = 0$$

Ainsi $g = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2$ appartient à \mathcal{G} , qui est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(F, E)$.

Soient F' un supplémentaire de $\text{Im } f$ dans F , et E' un supplémentaire de $\text{Ker } f$ dans E .

On munit F d'une base $(\varepsilon) \cup (\varepsilon')$ adaptée à la somme directe $F = \text{Im } f \oplus F'$.

Dans cette notation, (ε) est une base de $\text{Im } f$, donc formée de r vecteurs.

On munit E d'une base $(e) \cup (e')$ adaptée à la somme directe $E = \text{Ker } f \oplus E'$.

Dans cette notation, (e) est une base de $\text{Ker } f$, donc formée de $n - r$ vecteurs.

Soit g dans $\mathcal{L}(F, E)$, de matrice A dans les bases $(\varepsilon) \cup (\varepsilon')$ et $(e) \cup (e')$.

Dire que g est dans \mathcal{G} , c'est dire que $\text{Im } (g \circ f) \subset \text{Ker } f$, ou encore $g(\text{Im } f) \subset \text{Ker } f$.

Cela équivaut à dire que A se décompose en blocs sous la forme $A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$, où B est une matrice quelconque de type $(r, n - r)$, le bloc nul étant une matrice carrée d'ordre r .

Dans cette notation, B est la matrice dans les bases (ε) et (e) de la restriction de g à $\text{Im } f$ (cette restriction étant un morphisme quelconque de $\text{Im } f$ dans $\text{Ker } f$.)

On sait que l'application qui à un morphisme associe sa matrice dans une couple de bases donné est un isomorphisme. On en déduit que la dimension de \mathcal{G} est égal à la dimension de l'espace vectoriel des matrices A de la forme précédente, c'est-à-dire $np - r^2$.

Remarque : on vérifie que le résultat est correct même dans les "cas-limites" par exemple quand $r = 0$ (c'est-à-dire $f = 0$) car alors on ne peut parler d'une base (ε) de $\text{Im } f$. En effet dans ce cas, \mathcal{G} est égal à $\mathcal{L}(F, E)$ tout entier et on a $\dim \mathcal{G} = np$.

**CORRIGÉ DE L'EXERCICE 6** [[Retour à l'énoncé](#)]

Pour tous $x \in E$, et $\varphi \in E^*$: $x = \sum_{i=1}^n e_i^*(x)e_i = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^*(x)\varepsilon_i$ et $\varphi = \sum_{j=1}^n \varphi(e_j)e_j^* = \sum_{j=1}^n \varphi(\varepsilon_j)\varepsilon_j^*$.

Le coefficient d'indice (i, j) de P est la composante de ε_j sur e_i , c'est-à-dire $e_i^*(\varepsilon_j)$.

Mais $e_i^*(\varepsilon_j)$ est aussi la composante de e_i^* sur ε_j^* , c'est-à-dire le terme d'indice (j, i) de la matrice de passage Q^* de (ε^*) à (e^*) .

On en déduit que les matrices P et Q^* sont transposées l'une de l'autre.

Or P^* , matrice de passage de (e^*) à (ε^*) , est l'inverse de la matrice Q^* .

On en déduit finalement que $P^* = (Q^*)^{-1} = {}^tP^{-1}$.