

## Énoncés des exercices

EXERCICE 1 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Caractériser  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  de matrice  $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

EXERCICE 2 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Dans  $\mathbb{R}^3$ , soient  $(\Pi)$  le plan d'équation  $x + 2y + 3z = 0$  et  $(D)$  la droite  $\begin{cases} x = 3z \\ y = 2z \end{cases}$ .  
Déterminer la matrice  $A$  de la projection sur  $(\Pi)$  parallèlement à  $(D)$ .

EXERCICE 3 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Calculer l'inverse et les puissances de la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

EXERCICE 4 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

On se donne  $(\alpha, \beta, \gamma) \neq \vec{0}$  dans  $\mathbb{R}^3$ .  
Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ , dont la matrice est  $A = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2 \end{pmatrix}$  dans la base canonique.

Trouver le rang de  $f$ , son image, son noyau. Calculer  $A^n$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ .

EXERCICE 5 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimensions respectives  $n$  et  $p$ .

Soit  $f$  une application linéaire de  $E$  vers  $F$ , de rang  $r$ .

On définit  $\mathcal{G} = \{g \in \mathcal{L}(F, E), f \circ g \circ f = 0\}$ .

Montrer que  $\mathcal{G}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(F, E)$  et en donner la dimension.

EXERCICE 6 [ [Indication](#) ] [ [Correction](#) ]

Soient  $(e), (\varepsilon)$  deux bases de  $E$  ( $\dim E = n$ ), et  $(e^*), (\varepsilon^*)$  leurs bases duales.

Soit  $P$  la matrice de passage de  $(e)$  à  $(\varepsilon)$  et  $P^*$  celle de  $(e^*)$  à  $(\varepsilon^*)$ .

Exprimer  $P$  en fonction de  $P^*$ .

## Indications ou résultats

INDICATION POUR L'EXERCICE 1 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Vérifier que  $A^2 = A$ . Montrer que  $f$  est la projection sur le plan d'équation  $x + y + z = 0$ , parallèlement à la droite engendrée par  $c = (1, 1, 1)$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 2 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

$$\text{On trouve } A = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 7 & -6 & -9 \\ -2 & 6 & -6 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

INDICATION POUR L'EXERCICE 3 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Se placer dans  $\mathbb{R}_4[X]$ , muni de la base  $1, X, X^2, X^3, X^4$ .

Vérifier que  $A$  est la matrice de l'application  $f : P(X) \mapsto P(X + 1)$ .

Utiliser ensuite le fait que  $f^n(P(X)) = P(X + n)$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{Z}$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 4 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

L'image de  $f$  est la droite engendrée par  $(\alpha, \beta, \gamma)$ .

$\text{Ker } f$  est le plan d'équation  $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ .

Pour calculer  $A^n$ , on utilisera les matrices  $(\alpha \ \beta \ \gamma)$  et  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 5 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Considérer un supplémentaire  $F'$  de  $\text{Im } f$  dans  $F$ , et un supplémentaire  $E'$  de  $\text{Ker } f$  dans  $E$ .

Munir  $E$  et  $F$  de bases adaptées à ces sommes directes.

Caractériser alors les éléments de  $\mathcal{G}$  par leur matrice dans ce couple de bases.

En déduire que  $\dim \mathcal{G} = np - r^2$ .

INDICATION POUR L'EXERCICE 6 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Constater que le coefficient d'indice  $(i, j)$  de  $P$  est  $e_i^*(\varepsilon_j)$ .

Montrer que celui-ci est aussi le terme d'indice  $(j, i)$  de la matrice de passage  $Q^*$  de  $(\varepsilon^*)$  à  $(e^*)$ .

En déduire l'égalité  $P^* = {}^t P^{-1}$ .

## Corrigés des exercices

### CORRIGÉ DE L'EXERCICE 1 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

On constate que  $A^2 = A$ . Ainsi  $f$  est une projection vectorielle.

Il reste à déterminer le noyau et les vecteurs invariants de  $f$ .

$$u = (x, y, z) \in \text{Ker } f \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \Leftrightarrow x = y = z. \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$u = (x, y, z) \in \text{Inv } f \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 3x \\ -x + 2y - z = 3y \Leftrightarrow x + y + z = 0. \\ -x - y + 2z = 3z \end{cases}$$

Conclusion : L'application  $f$  est la projection vectorielle :

- ◇ Sur plan vectoriel d'équation  $x + y + z = 0$ , engendré par les vecteurs  $\begin{cases} a = (1, -1, 0) \\ b = (1, 0, -1) \end{cases}$
- ◇ Parallèlement à la droite engendrée par le vecteur  $c = (1, 1, 1)$ .

### CORRIGÉ DE L'EXERCICE 2 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

Soit  $u(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  et  $v = p(u) = (x', y', z')$ . Il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $v = u + \lambda(3, 2, 1)$ .

On écrit que  $v$  est dans (II) :  $x' + 2y' + 3z' = 0$  donc  $\lambda = -\frac{1}{10}(x + 2y + 3z)$ .

Ainsi  $(x', y', z') = (x, y, z) - \frac{1}{10}(x + 2y + 3z)(3, 2, 1)$ .

$$\text{On en déduit } \begin{cases} x' = \frac{1}{10}(7x - 6y - 9z) \\ y' = \frac{1}{10}(-2x + 6y - 6z) \\ z' = \frac{1}{10}(-x - 2y + 7z) \end{cases} \text{ Donc } A = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 7 & -6 & -9 \\ -2 & 6 & -6 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

### CORRIGÉ DE L'EXERCICE 3 [\[Retour à l'énoncé\]](#)

L'idée est d'associer à la matrice  $A$  une application linéaire  $f$  très simple.

On se place dans  $\mathbb{R}_4[X]$ , muni de la base canonique  $1, X, X^2, X^3, X^4$ .

On constate que  $\begin{cases} f(1) = 1, f(X) = 1 + X \\ f(X^2) = 1 + 2X + X^2 = (1 + X)^2, \end{cases} \begin{cases} f(X^3) = (1 + X)^3 \\ f(X^4) = (1 + X)^4 \end{cases}$

Par linéarité, on en déduit, pour tout polynôme :  $f(P(X)) = P(X + 1)$ .

Il est clair que  $f$  est un automorphisme de  $\mathbb{R}_4[X]$ , et que  $f^{-1}(P(X)) = P(X - 1)$ .

Il est tout aussi clair que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{Z}$ ,  $f(P(X)) = P(X + n)$ .

$$\text{Ainsi } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et, } \forall n \in \mathbb{Z}, A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n^2 & n^3 & n^4 \\ 0 & 1 & 2n & 3n^2 & 4n^3 \\ 0 & 0 & 1 & 3n & 6n^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**CORRIGÉ DE L'EXERCICE 4** [[Retour à l'énoncé](#)]

On note  $\varepsilon = (\alpha, \beta, \gamma)$ . Notons  $(e) = e_1, e_2, e_3$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

On constate que  $f(e_1) = \alpha\varepsilon$ ,  $f(e_2) = \beta\varepsilon$  et  $f(e_3) = \gamma\varepsilon$ .

Ainsi les  $f(e_k)$  (qui engendrent  $\text{Im } f$ ) sont dans la droite  $\mathbb{K}\varepsilon$  dirigée par  $\varepsilon$ .

Puisque  $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$ , l'un au moins des  $f(e_k)$  est non nul.

Ainsi l'application  $f$  est de rang 1 et  $\text{Im } f = \mathbb{K}\varepsilon$ .

Soit  $u(x, y, z)$  dans  $\mathbb{R}^3$  On a  $f(u) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(\alpha x + \beta y + \gamma z) = 0 \\ \beta(\alpha x + \beta y + \gamma z) = 0 \\ \gamma(\alpha x + \beta y + \gamma z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ .

Ainsi  $\text{Ker } f$  est le plan de  $\mathbb{R}^3$  d'équation  $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ .

On a  $A = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} (\alpha \ \beta \ \gamma)$ . D'autre part  $(\alpha \ \beta \ \gamma) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ .

On en déduit :  $A^2 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)A$ , puis :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A^n = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{n-1}A$ .

**CORRIGÉ DE L'EXERCICE 5** [[Retour à l'énoncé](#)]

$\mathcal{G} \neq \emptyset$  car  $g = 0$  convient. Soient  $g_1, g_2$  dans  $\mathcal{L}(F, E)$ , et  $\alpha_1, \alpha_2$  dans  $\mathbb{K}$ . On a :

$$f \circ (\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2) \circ f = f \circ (\alpha_1 g_1 \circ f + \alpha_2 g_2 \circ f) = \alpha_1 f \circ g_1 \circ f + \alpha_2 f \circ g_2 \circ f = 0$$

Ainsi  $g = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2$  appartient à  $\mathcal{G}$ , qui est donc un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(F, E)$ .

Soient  $F'$  un supplémentaire de  $\text{Im } f$  dans  $F$ , et  $E'$  un supplémentaire de  $\text{Ker } f$  dans  $E$ .

On munit  $F$  d'une base  $(\varepsilon) \cup (\varepsilon')$  adaptée à la somme directe  $F = \text{Im } f \oplus F'$ .

Dans cette notation,  $(\varepsilon)$  est une base de  $\text{Im } f$ , donc formée de  $r$  vecteurs.

On munit  $E$  d'une base  $(e) \cup (e')$  adaptée à la somme directe  $E = \text{Ker } f \oplus E'$ .

Dans cette notation,  $(e)$  est une base de  $\text{Ker } f$ , donc formée de  $n - r$  vecteurs.

Soit  $g$  dans  $\mathcal{L}(F, E)$ , de matrice  $A$  dans les bases  $(\varepsilon) \cup (\varepsilon')$  et  $(e) \cup (e')$ .

Dire que  $g$  est dans  $\mathcal{G}$ , c'est dire que  $\text{Im } (g \circ f) \subset \text{Ker } f$ , ou encore  $g(\text{Im } f) \subset \text{Ker } f$ .

Cela équivaut à dire que  $A$  se décompose en blocs sous la forme  $A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$ , où  $B$  est une matrice quelconque de type  $(r, n - r)$ , le bloc nul étant une matrice carrée d'ordre  $r$ .

Dans cette notation,  $B$  est la matrice dans les bases  $(\varepsilon)$  et  $(e)$  de la restriction de  $g$  à  $\text{Im } f$  (cette restriction étant un morphisme quelconque de  $\text{Im } f$  dans  $\text{Ker } f$ .)

On sait que l'application qui à un morphisme associe sa matrice dans une couple de bases donné est un isomorphisme. On en déduit que la dimension de  $\mathcal{G}$  est égal à la dimension de l'espace vectoriel des matrices  $A$  de la forme précédente, c'est-à-dire  $np - r^2$ .

Remarque : on vérifie que le résultat est correct même dans les "cas-limites" par exemple quand  $r = 0$  (c'est-à-dire  $f = 0$ ) car alors on ne peut parler d'une base  $(\varepsilon)$  de  $\text{Im } f$ . En effet dans ce cas,  $\mathcal{G}$  est égal à  $\mathcal{L}(F, E)$  tout entier et on a  $\dim \mathcal{G} = np$ .

**CORRIGÉ DE L'EXERCICE 6** [[Retour à l'énoncé](#)]

Pour tous  $x \in E$ , et  $\varphi \in E^*$  :  $x = \sum_{i=1}^n e_i^*(x)e_i = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^*(x)\varepsilon_i$  et  $\varphi = \sum_{j=1}^n \varphi(e_j)e_j^* = \sum_{j=1}^n \varphi(\varepsilon_j)\varepsilon_j^*$ .

Le coefficient d'indice  $(i, j)$  de  $P$  est la composante de  $\varepsilon_j$  sur  $e_i$ , c'est-à-dire  $e_i^*(\varepsilon_j)$ .

Mais  $e_i^*(\varepsilon_j)$  est aussi la composante de  $e_i^*$  sur  $\varepsilon_j^*$ , c'est-à-dire le terme d'indice  $(j, i)$  de la matrice de passage  $Q^*$  de  $(\varepsilon^*)$  à  $(e^*)$ .

On en déduit que les matrices  $P$  et  $Q^*$  sont transposées l'une de l'autre.

Or  $P^*$ , matrice de passage de  $(e^*)$  à  $(\varepsilon^*)$ , est l'inverse de la matrice  $Q^*$ .

On en déduit finalement que  $P^* = (Q^*)^{-1} = {}^tP^{-1}$ .