Énoncés des exercices

Exercice 1 [Indication] [Correction]

Caractériser $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de matrice $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2 [Indication] [Correction]

Dans $\mathbb{R}^3$, soient (Π) le plan d'équation $x + 2y + 3z = 0$ et (D) la droite $\begin{cases} x = 3z \\ y = 2z \end{cases}$
Déterminer la matrice A de la projection sur (Π) parallèlement à (D).

Exercice 3 [Indication] [Correction]

Calculer l'inverse et les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 [Indication] [Correction]

On se donne $(\alpha, \beta, \gamma) \neq \overrightarrow{0}$ dans $\mathbb{R}^3$.
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, dont la matrice est $A = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2 & \beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique.
Trouver le rang de f, son image, son noyau. Calculer A^n pour tout n de $\mathbb{N}^*$.

Exercice 5 [Indication] [Correction]

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions respectives n et p.
Soit f une application linéaire de E vers F, de rang r.
On définit $\mathcal{G} = \{g \in \mathcal{L}(F, E), f \circ g \circ f = 0\}$.
Montrer que $\mathcal{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(F, E)$ et en donner la dimension.

Exercice 6 [Indication] [Correction]

Soient $(e), (\varepsilon)$ deux bases de E ($\dim E = n$), et $(e^*), (\varepsilon^*)$ leurs bases duales.
Soit P la matrice de passage de (e) à (ε) et P^* celle de (e^*) à (ε^*).
Exprimer P en fonction de P^*.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Indications ou résultats

Indication pour l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

Vérifier que $A^2 = A$. Montrer que f est la projection sur le plan d'équation $x + y + z = 0$, parallèlement à la droite engendrée par $c = (1, 1, 1)$.

Indication pour l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

On trouve $A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 7 & -6 & -9 \\ -2 & 6 & -6 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$.

Indication pour l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

Se placer dans $\mathbb{R}_4[X]$, muni de la base $1, X, X^2, X^3, X^4$.
Vérifier que A est la matrice de l'application $f : P(X) \mapsto P(X + 1)$.
Utiliser ensuite le fait que $f^n(P(X)) = P(X + n)$ pour tout n de $\mathbb{Z}$.

Indication pour l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

L'image de f est la droite engendrée par (α, β, γ).

Ker f est le plan d'équation $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$.

Pour calculer A^n, on utilisera les matrices $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.

Indication pour l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

Considérer un supplémentaire F' de Im f dans F, et un supplémentaire E' de Ker f dans E.
Munir E et F de bases adaptées à ces sommes directes.
Caractériser alors les éléments de $\mathcal{G}$ par leur matrice dans ce couple de bases.
En déduire que $\dim \mathcal{G} = np - r^2$.

Indication pour l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

Constater que le coefficient d'indice (i, j) de P est $e_i^*(\varepsilon_j)$.
Montrer que celui-ci est aussi le terme d'indice (j, i) de la matrice de passage Q^* de (ε^*) à (e^*).
En déduire l'égalité $P^* = {}^{\mathrm{T}}P^{-1}$.

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Corrigés des exercices

Corrigé de l'exercice 1 [Retour à l'énoncé]

On constate que $A^2 = A$. Ainsi f est une projection vectorielle.

Il reste à déterminer le noyau et les vecteurs invariants de f.

$$u = (x, y, z) \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z.$$

$$u = (x, y, z) \in \operatorname{Inv} f \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y - z = 3x \\ -x + 2y - z = 3y \\ -x - y + 2z = 3z \end{cases} \Leftrightarrow x + y + z = 0.$$

Conclusion : L'application f est la projection vectorielle :

◇ Sur plan vectoriel d'équation $x + y + z = 0$, engendré par les vecteurs $\begin{cases} a = (1, -1, 0) \\ b = (1, 0, -1) \end{cases}$

◇ Parallèlement à la droite engendrée par le vecteur $c = (1, 1, 1)$.

Corrigé de l'exercice 2 [Retour à l'énoncé]

Soit $u(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $v = p(u) = (x', y', z')$. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v = u + \lambda(3, 2, 1)$.

On écrit que v est dans (Π) : $x' + 2y' + 3z' = 0$ donc $\lambda = -\frac{1}{10}(x + 2y + 3z)$.

Ainsi $(x', y', z') = (x, y, z) - \frac{1}{10}(x + 2y + 3z)(3, 2, 1)$.

$$\text{On en déduit } \begin{cases} x' = \frac{1}{10}(7x - 6y - 9z) \\ y' = \frac{1}{10}(-2x + 6y - 6z) \\ z' = \frac{1}{10}(-x - 2y + 7z) \end{cases} \text{ Donc } A = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 7 & -6 & -9 \\ -2 & 6 & -6 \\ -1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

Corrigé de l'exercice 3 [Retour à l'énoncé]

L'idée est d'associer à la matrice A une application linéaire f très simple.

On se place dans $\mathbb{R}_4[X]$, muni de la base canonique $1, X, X^2, X^3, X^4$.

$$\text{On constate que } \begin{cases} f(1) = 1,\ f(X) = 1 + X \\ f(X^2) = 1 + 2X + X^2 = (1 + X)^2, \end{cases} \begin{cases} f(X^3) = (1 + X)^3 \\ f(X^4) = (1 + X)^4 \end{cases}$$

Par linéarité, on en déduit, pour tout polynôme : $f(P(X)) = P(X + 1)$.

Il est clair que f est un automorphisme de $\mathbb{R}_4[X]$, et que $f^{-1}(P(X)) = P(X - 1)$.

Il est tout aussi clair que, pour tout n de $\mathbb{Z}$, $f(P(X)) = P(X + n)$.

$$\text{Ainsi } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et, } \forall n \in \mathbb{Z},\ A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n^2 & n^3 & n^4 \\ 0 & 1 & 2n & 3n^2 & 4n^3 \\ 0 & 0 & 1 & 3n & 6n^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Corrigé de l'exercice 4 [Retour à l'énoncé]

On note $\varepsilon = (\alpha, \beta, \gamma)$. Notons $(e) = e_1, e_2, e_3$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On constate que $f(e_1) = \alpha\varepsilon$, $f(e_2) = \beta\varepsilon$ et $f(e_3) = \gamma\varepsilon$.

Ainsi les $f(e_k)$ (qui engendrent $\operatorname{Im} f$) sont dans la droite $\mathbb{K}\varepsilon$ dirigée par ε.

Puisque $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$, l'un au moins des $f(e_k)$ est non nul.

Ainsi l'application f est de rang 1 et $\operatorname{Im} f = \mathbb{K}\varepsilon$.

Soit $u(x, y, z)$ dans $\mathbb{R}^3$ On a $f(u) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha(\alpha x + \beta y + \gamma z) = 0 \\ \beta(\alpha x + \beta y + \gamma z) = 0 \\ \gamma(\alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha x + \beta y + \gamma z = 0.$

Ainsi $\operatorname{Ker} f$ est le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$.

On a $A = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} (\alpha \quad \beta \quad \gamma)$. D'autre part $(\alpha \quad \beta \quad \gamma) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$.

On en déduit : $A^2 = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)A$, puis : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^{n-1}A$.

Corrigé de l'exercice 5 [Retour à l'énoncé]

$\mathcal{G} \neq \emptyset$ car $g = 0$ convient. Soient g_1, g_2 dans $\mathcal{L}(F, E)$, et α_1, α_2 dans $\mathbb{K}$. On a :

$$f \circ (\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2) \circ f = f \circ (\alpha_1 g_1 \circ f + \alpha_2 g_2 \circ f) = \alpha_1 f \circ g_1 \circ f + \alpha_2 f \circ g_2 \circ f = 0$$

Ainsi $g = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2$ appartient à $\mathcal{G}$, qui est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(F, E)$.

Soient F' un supplémentaire de $\operatorname{Im} f$ dans F, et E' un supplémentaire de $\operatorname{Ker} f$ dans E.

On munit F d'une base $(\varepsilon) \cup (\varepsilon')$ adaptée à la somme directe $F = \operatorname{Im} f \oplus F'$.

Dans cette notation, (ε) est une base de $\operatorname{Im} f$, donc formée de r vecteurs.

On munit E d'une base $(e) \cup (e')$ adaptée à la somme directe $E = \operatorname{Ker} f \oplus E'$.

Dans cette notation, (e) est une base de $\operatorname{Ker} f$, donc formée de $n - r$ vecteurs.

Soit g dans $\mathcal{L}(F, E)$, de matrice A dans les bases $(\varepsilon) \cup (\varepsilon')$ et $(e) \cup (e')$.

Dire que g est dans $\mathcal{G}$, c'est dire que $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Ker} f$, ou encore $g(\operatorname{Im} f) \subset \operatorname{Ker} f$.

Cela équivaut à dire que A se décompose en blocs sous la forme $A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$, où B est une matrice quelconque de type $(r, n - r)$, le bloc nul étant une matrice carrée d'ordre r.

Dans cette notation, B est la matrice dans les bases (ε) et (e) de la restriction de g à $\operatorname{Im} f$ (cette restriction étant un morphisme quelconque de $\operatorname{Im} f$ dans $\operatorname{Ker} f$.)

On sait que l'application qui à un morphisme associe sa matrice dans une couple de bases donné est un isomorphisme. On en déduit que la dimension de $\mathcal{G}$ est égal à la dimension de l'espace vectoriel des matrices A de la forme précédente, c'est-à-dire $np - r^2$.

Remarque : on vérifie que le résultat est correct même dans les "cas-limites" par exemple quand $r = 0$ (c'est-à-dire $f = 0$) car alors on ne peut parler d'une base (ε) de $\operatorname{Im} f$. En effet dans ce cas, $\mathcal{G}$ est égal à $\mathcal{L}(F, E)$ tout entier et on a $\dim \mathcal{G} = np$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Corrigé de l'exercice 6 [Retour à l'énoncé]

Pour tous $x \in E$, et $\varphi \in E^*$: $x = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x)e_i = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^*(x)\varepsilon_i$ et $\varphi = \sum_{j=1}^{n} \varphi(e_j)e_j^* = \sum_{j=1}^{n} \varphi(\varepsilon_j)\varepsilon_j^*$.

Le coefficient d'indice (i, j) de P est la composante de ε_j sur e_i, c'est-à-dire $e_i^*(\varepsilon_j)$.

Mais $e_i^*(\varepsilon_j)$ est aussi la composante de e_i^* sur ε_j^*, c'est-à-dire le terme d'indice (j, i) de la matrice de passage Q^* de (ε^*) à (e^*).

On en déduit que les matrices P et Q^* sont transposées l'une de l'autre.

Or P^*, matrice de passage de (e^*) à (ε^*), est l'inverse de la matrice Q^*.

On en déduit finalement que $P^* = (Q^*)^{-1} = {}^{\mathrm{T}}P^{-1}$.

 ©EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021