-EXERCICE 27.6-

• ENONCE :

« Champ au voisinage de l'axe d'un solénoïde »

On considère une distribution de courants cylindriques autour d'un axe Oz telle que tout plan (P) contenant Oz est plan **d'antisymétrie** de cette distribution; en outre, on suppose **connu** le champ **sur l'axe** Oz : on peut prendre pour exemple la spire, le solénoïde de longueur finie, le cône etc …

En notant $\vec{B}_0(z)$ le champ sur l'axe, déterminer le champ $\vec{B}(M)$ en un point M « proche » de l'axe.

Rq : on envisagera une approximation du 1er ordre, puis du 2ème ordre.

• CORRIGE :

« Champ au voisinage de l'axe d'un solénoïde »

♦ Si tout plan (P) contenant Oz est plan d'antisymétrie, alors le champ sur l'axe est porté par Oz et donc : $\vec{B}_0(z) = B_0(z)\vec{e}_z$; par ailleurs, si l'on considère un point M n'appartenant pas à l'axe, le plan MOz est également d'antisymétrie $\Rightarrow$ $\vec{B}(M) \in$ ce plan $\Rightarrow$ $\boxed{B_\theta(M) = 0}$ (coord.cylind.)

♦ Nous allons donc développer les composantes du champ au voisinage de r=0 :

$$B_r(r,z) = B_r(0,z) + r\left.\frac{\partial B_r}{\partial r}\right|_{r=0} + \frac{r^2}{2}\left.\frac{\partial^2 B_r}{\partial r^2}\right|_{r=0} + o(r^2)$$

$$B_z(r,z) = B_z(0,z) + r\left.\frac{\partial B_z}{\partial r}\right|_{r=0} + \frac{r^2}{2}\left.\frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2}\right|_{r=0} + o(r^2)$$

Nous savons déjà que $B_r(0,z) = 0$ (sur l'axe, le champ n'a pas de composante radiale) ; de plus, en choisissant un point M' symétrique de M par rapport à un plan (P) contenant l'axe Oz, on a : $\vec{B}(M') = sym\{\vec{B}(M)\}/(P)$, puisque (P) est un **plan d'antisymétrie des courants** et $\vec{B}$ **un pseudo-vecteur**. Dire que : $\vec{B}(M') = sym\{\vec{B}(M)\}/(P) \Leftrightarrow B_z(M') = B_z(M)$ et : $B_r(M') = -B_r(M)$

Enfin, passer de M à M' revient à changer r en –r, on peut donc en conclure :

$B_z(r,z)$ = **fonction PAIRE de r** et : $B_r(r,z)$ = **fonction IMPAIRE de r** ; il vient alors :

$$B_r(r,z) = r\left.\frac{\partial B_r}{\partial r}\right|_{r=0} + o(r^2) \quad \text{et:} \quad B_z(r,z) = B_0(z) + \frac{r^2}{2}\left.\frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2}\right|_{r=0} + o(r^2)$$

♦ Pour le calcul de $B_r(r,z)$, nous proposons deux méthodes :

1) L'opérateur « div » est donné en coordonnées cylindriques :

$$div\vec{B} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\{r \times r\left.\frac{\partial B_r}{\partial r}\right|_{r=0}\} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial B_r}{\partial r}\right|_{r=0} = -\frac{1}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z}$$; d'où :

$$\boxed{B_r(r,z) = -\frac{r}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z} = -\frac{r}{2}\frac{dB_0(z)}{dz}} \quad (1)$$

(en négligeant le terme du 3ème ordre en r obtenu si l'on tenait compte de $\frac{r^2}{2}\left.\frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2}\right|_{r=0}$)

Rq : il est très important ici de distinguer si un terme dépend ou non de telle ou telle variable ; par exemple : $\left.\frac{\partial B_r}{\partial r}\right|_{r=0}$ **n'est plus une fonction de r** $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}(r^2\left.\frac{\partial B_r}{\partial r}\right|_{r=0}) = 2r\left.\frac{\partial B_r}{\partial r}\right|_{r=0}$

2) On ne connaît pas la divergence en coordonnées cylindriques : on traduit alors la nullité du flux de $\vec{B}$ à travers une surface **fermée** judicieusement choisie. Cette dernière sera l'enveloppe d'un cylindre d'axe Oz, de rayon r et de longueur dz ; on peut remarquer que :

• la surface latérale du cylindre est orientée par un vecteur $d\vec{S}$ radial $\Rightarrow$ pour calculer le flux $\iint_{surf.lat}\vec{B}\cdot d\vec{S}$, il suffira de considérer la composante B_r du champ.

• les surfaces de base du cylindre sont orientées par $\vec{e}_z$ en z+dz et par (- $\vec{e}_z$) en z ⇒ pour calculer le flux à travers ces surfaces, il suffira de prendre en compte la composante B_z ; d'où :

$$\oint\!\!\oint_{cylindre} \vec{B}\cdot d\vec{S} = 2\pi r dz B_r(r,z) + \pi r^2 B_z(r,z)\big|_{z+dz} - \pi r^2 B_z(r,z)\big|_z = 0 \Rightarrow \text{pour } dz \to 0 :$$

$$\lim[r\frac{B_z(r,z)\big|_{z+dz} - B_z(r,z)\big|_z}{dz}] = r\frac{\partial B_z}{\partial z} = -2B_r(r,z) = r\frac{dB_0(z)}{dz}$$, toujours en négligeant le terme du $3^{\text{ème}}$ ordre dû à $\frac{r^2}{2}\frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2}\Big|_{r=0}$ ⇒ on retrouve bien : $B_r(r,z) = -\frac{r}{2}\frac{dB_0(z)}{dz}$

♦ Si l'on travaille au second ordre en r, il faut calculer $\frac{r^2}{2}\frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2}\Big|_{r=0}$; dans le **vide** :

$$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \vec{0} \Rightarrow \text{pour la 2ème composante: } \frac{\partial B_r}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial r} = -\frac{r}{2}\frac{d^2B_0(z)}{dz^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} = -\frac{1}{2}\frac{d^2B_0(z)}{dz^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{B_z(r,z) = B_0(z) - \frac{r^2}{4}\frac{d^2B_0(z)}{dz^2}} \quad (2)$$