-EXERCICE 27.6-

• ENONCE :

« Champ au voisinage de l'axe d'un solénoïde »

On considère une distribution de courants cylindriques autour d'un axe Oz telle que tout plan (P) contenant Oz est plan **d'antisymétrie** de cette distribution; en outre, on suppose **connu** le champ **sur l'axe** Oz : on peut prendre pour exemple la spire, le solénoïde de longueur finie, le cône etc …

En notant $\vec{B}_0(z)$ le champ sur l'axe, déterminer le champ $\vec{B}(M)$ en un point M « proche » de l'axe.

Rq : on envisagera une approximation du 1er ordre, puis du 2ème ordre.

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

ELECTROMAGNETISME

EXERCICE D'ORAL

• CORRIGE :

« Champ au voisinage de l'axe d'un solénoïde »

♦ Si tout plan (P) contenant Oz est plan d'antisymétrie, alors le champ sur l'axe est porté par Oz et donc : $\vec{B}_0(z) = B_0(z)\vec{e}_z$; par ailleurs, si l'on considère un point M n'appartenant pas à l'axe, le plan MOz est également d'antisymétrie $\Rightarrow \vec{B}(M) \in$ ce plan $\Rightarrow$ $\boxed{B_\theta(M) = 0}$ (coord.cylind.)

♦ Nous allons donc développer les composantes du champ au voisinage de r=0 :

$$B_r(r,z) = B_r(0,z) + r\left.\frac{\partial B_r}{\partial r}\right|_{r=0} + \left.\frac{r^2}{2}\frac{\partial^2 B_r}{\partial r^2}\right|_{r=0} + o(r^2)$$

$$B_z(r,z) = B_z(0,z) + r\left.\frac{\partial B_z}{\partial r}\right|_{r=0} + \left.\frac{r^2}{2}\frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2}\right|_{r=0} + o(r^2)$$

Nous savons déjà que $B_r(0,z) = 0$ (sur l'axe, le champ n'a pas de composante radiale) ; de plus, en choisissant un point M' symétrique de M par rapport à un plan (P) contenant l'axe Oz, on a : $\vec{B}(M') = sym\{\vec{B}(M)\}/(P)$, puisque (P) est un **plan d'antisymétrie des courants** et $\vec{B}$ **un pseudo-vecteur** . Dire que : $\vec{B}(M') = sym\{\vec{B}(M)\}/(P) \Leftrightarrow B_z(M') = B_z(M)$ et : $B_r(M') = -B_r(M)$

Enfin, passer de M à M' revient à changer r en –r, on peut donc en conclure :

$B_z(r,z)$ = **fonction PAIRE de r** et : $B_r(r,z)$ = **fonction IMPAIRE de r** ; il vient alors :

$$B_r(r,z) = r\left.\frac{\partial B_r}{\partial r}\right|_{r=0} + o(r^2) \quad \text{et:} \quad B_z(r,z) = B_0(z) + \left.\frac{r^2}{2}\frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2}\right|_{r=0} + o(r^2)$$

♦ Pour le calcul de $B_r(r,z)$, nous proposons deux méthodes :

1) L'opérateur « div » est donné en coordonnées cylindriques :

$$div\vec{B} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rB_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\{r \times r\left.\frac{\partial B_r}{\partial r}\right|_{r=0}\} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \left.\frac{\partial B_r}{\partial r}\right|_{r=0} = -\frac{1}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z}$$; d'où :

$$\boxed{B_r(r,z) = -\frac{r}{2}\frac{\partial B_z}{\partial z} = -\frac{r}{2}\frac{dB_0(z)}{dz}} \quad (1)$$

(en négligeant le terme du 3ème ordre en r obtenu si l'on tenait compte de $\left.\frac{r^2}{2}\frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2}\right|_{r=0}$)

Rq : il est très important ici de distinguer si un terme dépend ou non de telle ou telle variable ; par exemple : $\left.\frac{\partial B_r}{\partial r}\right|_{r=0}$ **n'est plus une fonction de r** $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial r}(r^2\left.\frac{\partial B_r}{\partial r}\right|_{r=0}) = 2r\left.\frac{\partial B_r}{\partial r}\right|_{r=0}$

2) On ne connaît pas la divergence en coordonnées cylindriques : on traduit alors la nullité du flux de $\vec{B}$ à travers une surface **fermée** judicieusement choisie. Cette dernière sera l'enveloppe d'un cylindre d'axe Oz, de rayon r et de longueur dz ; on peut remarquer que :

- la surface latérale du cylindre est orientée par un vecteur $d\vec{S}$ radial $\Rightarrow$ pour calculer le flux $\iint_{surf.lat} \vec{B}\cdot d\vec{S}$, il suffira de considérer la composante B_r du champ.

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

• les surfaces de base du cylindre sont orientées par $\vec{e}_z$ en z+dz et par (-$\vec{e}_z$) en z $\Rightarrow$ pour calculer le flux à travers ces surfaces, il suffira de prendre en compte la composante B_z ; d'où :

$\oiint_{cylindre} \vec{B}\cdot d\vec{S} = 2\pi r dz B_r(r,z) + \pi r^2 B_z(r,z)\Big|_{z+dz} - \pi r^2 B_z(r,z)\Big|_z = 0 \Rightarrow$ pour $dz \to 0$:

$\lim[r\dfrac{B_z(r,z)\Big|_{z+dz} - B_z(r,z)\Big|_z}{dz}] = r\dfrac{\partial B_z}{\partial z} = -2B_r(r,z) = r\dfrac{dB_0(z)}{dz}$, toujours en négligeant le terme du 3ème ordre dû à $\dfrac{r^2}{2}\dfrac{\partial^2 B_z}{\partial r^2}\Big|_{r=0} \Rightarrow$ on retrouve bien : $B_r(r,z) = -\dfrac{r}{2}\dfrac{dB_0(z)}{dz}$

♦ Si l'on travaille au second ordre en r, il faut calculer $\dfrac{r^2}{2}\dfrac{\partial^2 B_z}{\partial r^2}\Big|_{r=0}$; dans le **vide** :

$\overrightarrow{rot}\vec{B} = \vec{0} \Rightarrow$ pour la 2ème composante: $\dfrac{\partial B_r}{\partial z} = \dfrac{\partial B_z}{\partial r} = -\dfrac{r}{2}\dfrac{d^2 B_0(z)}{dz^2} \Rightarrow \dfrac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{d^2 B_0(z)}{dz^2}$

$$\Rightarrow \boxed{B_z(r,z) = B_0(z) - \frac{r^2}{4}\frac{d^2 B_0(z)}{dz^2}} \quad (2)$$

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021