Double sommation

Double sommation

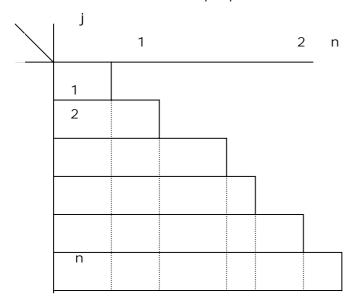
Soient n et p deux entiers naturels non nuls, (a_i) $_{1 \leq i \leq n}$ et (b_i) $_{1 \leq i \leq n}$ deux suites de réels.

$$Indices\ indépendants: \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}} a_i b_j \ = \ \sum_{i=1}^n \ \left(\sum_{j=1}^n a_i b_j \right) = \left(\sum_{i=1}^p b_i \right) \left(\sum_{j=1}^p b_j \right) \left(\sum_{i=1}^n a_i \right).$$

Indices liés :
$$\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq i}} \ a_i b_j \ = \ \sum_{i=1}^n \ a_i b_j \ = \ \sum_{i=1}^n a_i \ \sum_{j=1}^i b_j \ .$$

$$\begin{split} &= \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \leq i \leq n}} a_i b_j \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n a_i b_j \\ &= \sum_{j=1}^n b_j \sum_{i=j}^n a_i \;. \end{split}$$

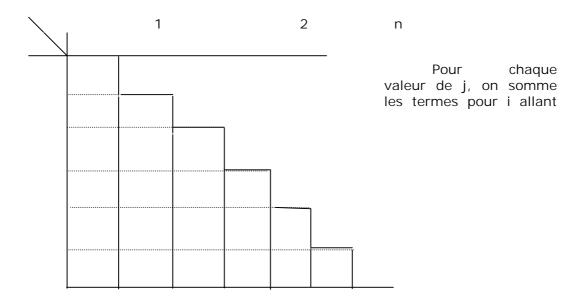
Pour mieux visualiser les valeurs prises par i et j dans le cas où les indices sont liés, on peut utiliser un tableau. Pour l'exemple précédent, on a :



Pour chaque valeur de i, on somme les termes pour j allant

Double sommation

Si on somme d'abord par rapport à j, le tableau est :



Quand procéder à une inversion des sommes ? On procède à une inversion de l'ordre de sommation pour faire apparaître une dernière somme que l'on sait calculer.

Page 2 Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE

 $@ \ EduKlub \ S.A.$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.