Double sommation

Soient n et p deux entiers naturels non nuls, $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$ deux suites de réels.

Indices indépendants : $\displaystyle\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} a_i b_j = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_i b_j \right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right) \left(\sum_{j=1}^{p} b_j \right) = \left(\sum_{j=1}^{p} b_j \right) \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \right)$.

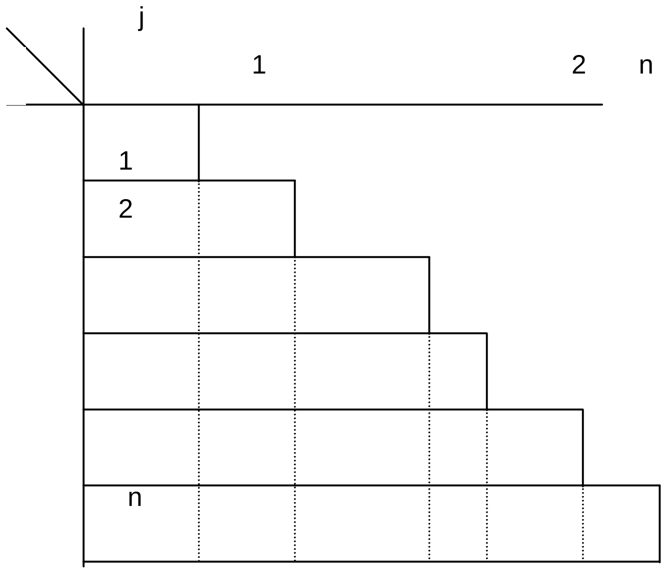
Indices liés : $\displaystyle\sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq i}} a_i b_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i} a_i b_j = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{i} b_j$.

$$= \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \leq i \leq n}} a_i b_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j}^{n} a_i b_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} b_j \sum_{i=j}^{n} a_i .$$

Pour mieux visualiser les valeurs prises par i et j dans le cas où les indices sont liés, on peut utiliser un tableau. Pour l'exemple précédent, on a :

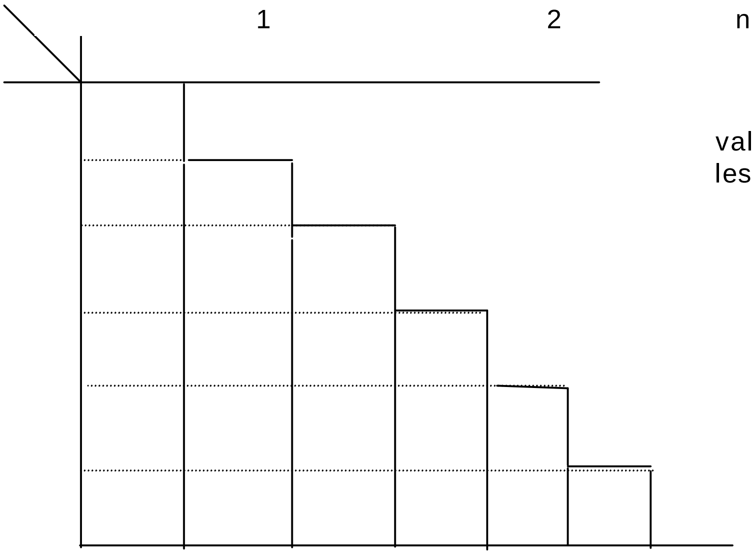


Pour chaque valeur de i, on somme les termes pour j allant

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Si on somme d'abord par rapport à j, le tableau est :



Pour chaque valeur de j, on somme les termes pour i allant

Quand procéder à une inversion des sommes ? On procède à une inversion de l'ordre de sommation pour faire apparaître une dernière somme que l'on sait calculer.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021