Enoncés

Exercice 1.

Dans cet exercice, on envisage des codages binaires (successions de 0 et de 1). Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note U_n le nombre de codages binaires à n chiffres se terminant par 1 et ne comportant jamais deux 0 consécutifs.

1. Déterminer U_1 et U_2.
2. Exprimer pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ U_{n+2} en fonction de U_{n+1} et U_n.

Exercice 2.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Une cour fermée est limitée par n murs discernables. On repeint chacun des murs avec une couleur tirée au hasard parmi un stock de p couleurs différentes ($p\geq 2$). Les choix des couleurs sont supposés mutuellement indépendants.

On note $N_{n,p}$ le nombre de façons de repeindre les murs de la cour de sorte qu'il n'y ait jamais deux murs consécutifs de la même couleur. Prouver que :

$$N_{n+2,p} = (p-2)\, N_{n+1,p} + (p-1)\, N_{n,p.}$$

Exercice 3.

Soit n un entier naturel non nul et E un ensemble à n éléments. En utilisant des raisonnements combinatoires:

1) Dénombrer les couples de parties (A,B) de E telles que $A \cup B = E$

2) Dénombrer les triplets de parties (A,B,C) de E telles que $A \cup B \cup C = E$

Montrer par récurrence que pour tout entier p supérieur ou égal à 2 et pour tout entier naturel n non nul, le nombre de p-listes $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ de parties d'un ensemble F à n éléments telles que $\bigcup_{i=1}^{P} A_i = F$ est $(2^p-1)^n$.

Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE
© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Correction

Exercice 1.

1. Le seul codage à 1 chiffre se terminant par 1 est : « 1 ». Comme il ne comporte pas la séquence « 00 », on a :

$$U_1 = 1$$

De même, « 01 » et « 11 » conviennent d'où :

$$U_2 = 2$$

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A_{n+2} l'ensemble des codages binaires de n+2 chiffres se terminant par 1 et ne comportant jamais deux 0 consécutifs, B_{n+2} les codages de A_{n+2} dont l'avant dernier chiffre est 1 et C_{n+2} l'ensemble des codages de A_{n+2} dont l'avant dernier chiffre est 0. On a :

$$A_{n+2} = B_{n+2} \cup C_{n+2}$$

Cette union étant disjointe (l'avant-dernier chiffre d'un codage ne peut à la fois être 1 et 0), on a :

Card A_{n+2} = Card B_{n+2} + Card C_{n+2}

De plus :

-Card A_{n+2} = U_{n+2} (par définition)

-Card B_{n+2} = U_{n+1} (il y a autant de codages de n+1 chiffres finissant par 1 et ne comportant jamais deux 0 consécutifs que de codages de n+2 chiffres finissant par deux 1 et ne comportant jamais deux 0 consécutifs).

-Card C_{n+2} = U_n (comme un codage de C_{n+2} ne comporte jamais la séquence « 00 », il finit nécessairement par « 101 ». Il y a donc 1 en $n^{ème}$ position).

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$$

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Exercice 2.

Notons :

- $A_{n+2,p}$ l'ensemble des façons de repeindre les n+2 murs d'une cour de telle sorte qu'il n'y ait jamais deux murs consécutifs de la même couleur,

- $B_{n+2,p}$ l'ensemble des façons de repeindre les n+2 murs d'une cour de telle sorte qu'il n'y ait jamais deux murs consécutifs de la même couleur et telles que le premier et le $(n+1)^{ème}$ mur soient de la même couleur,

- $C_{n+2,p}$ l'ensemble des façons de repeindre les n+2 murs de la cour de telle sorte qu'il n'y ait jamais deux murs consécutifs de la même couleur et telles que le premier et le $(n+1)^{ème}$ mur soient de couleurs différentes.

  On a : $A_{n+2,p} = B_{n+2,p} \cup C_{n+2,p}$

  et cette union étant disjointe : $Card(A_{n+2,p}) = Card(B_{n+2,p}) + Card(C_{n+2,p})$.

  De plus :

  -Card $A_{n+2,p} = N_{n+2,p}$. (par définition de N_{n+2},p)

  -Card $B_{n+2,p} = (p-1)N_{n,p}$ (il faut et il suffit de peindre les n premiers murs de sorte que le premier et le $n^{ème}$ mur soient de couleurs différentes -$N_{n,p}$ façons-, de peindre le $(n+1)^{ème}$ mur de la même couleur que le premier - 1 possibilité- puis de peindre le dernier mur d'une couleur différente de la couleur commune du premier et du $(n+1)^{ème}$ - p-1 possibilités -),

  -Card $C_{n+2,p} = (p-2)N_{n+1,p}$ (il faut et il suffit de peindre les n+1 premiers murs de sorte que le premier et le $(n+1)^{ème}$ mur soient de couleurs différentes -$N_{n+1,p}$ façons - puis de peindre le dernier mur d'une couleur différente du premier et du $(n+1)^{ème}$ mur - p-2 possibilités -),

  On peut maintenant conclure :

$$N_{n+2,p} = (p-2)N_{n+1,p} + (p-1)N_{n,p}$$

Exercice 3.

1. Soient R l'ensemble des couples (A, B) de parties de E telles que $A \cup B = E$ et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, R_k l'ensemble des couples de parties (A, B) de E tels que $A \cup B = E$ et Card(A) = k.

   On a : $R = \bigcup_{k=0}^{n} R_k$

   L'union étant disjointe (une partie A donnée ne peut avoir à la fois comme cardinal k et k' avec $k \neq k'$), on peut alors écrire :

   $Card(R) = \sum_{k=0}^{n} Card(R_k)$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Pour tout k$\in[\![0,n]\!]$, si A est une partie de cardinal k de E, pour avoir A ∪ B = E, il faut et il suffit de choisir B de telle sorte que B soit la réunion de $\bar{A}$ et d'une partie C de A.

Ainsi pour tout k$\in[\![0,n]\!]$, pour choisir une partie A cardinal k de E et une partie B de E telles que A ∪ B = E, il faut et il suffit de :

- choisir une partie A de cardinal k de E (C_n^k possibilités),
- choisir $\bar{A}$ (1 possibilité), et :
- choisir une partie C de A (2^k possibilités, A étant de cardinal k).

On en déduit alors : $\forall k \in [\![0,n]\!]$, Card($R_k$) = $C_n^k 2^k$, et donc, d'après ce qui précède :

Card(R) = $\sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^k$ soit d'après la formule du binôme de Newton :

= $(1+2)^n$ et donc :

= 3^n d'où la conclusion :

Il y a 3^n couples (A, B) de parties de E telles que A ∪ B = E

NB : On aurait également pu montrer qu'il y a autant de couples (A, B) convenables que d'applications de E dans {0, 1, 2} qui à tout élément de $A\cap\overline{B}$ associe 0, de $B\cap\overline{A}$ associe 1 et de A ∩ B associe 2.

2. Soient S l'ensemble des triplets (A, B, C) de parties de E telles que A ∪ B ∪ C = E et pour tout k$\in[\![0,n]\!]$, S_k l'ensemble des triplets de parties (A, B, C) de E tels que :

A ∪ B ∪ C = E et Card(A ∪ B) = k. On a : S = $\bigcup_{k=0}^{n} S_k$.

L'union étant disjointe (pour tout couple (A, B) de parties de E, A ∪ B ne peut avoir à la fois comme cardinal k et k' avec k≠k'), on peut alors écrire : Card(S) = $\sum_{k=0}^{n}$ Card(S_k).

Pour tout k$\in[\![0,n]\!]$, si A ∪ B est une partie de cardinal k de E, pour avoir : A ∪ B ∪ C = E, il faut et il suffit que C soit la réunion de $\overline{A\cup B}$ et d'une partie D quelconque de A ∪ B. Ainsi Pour tout k$\in[\![0,n]\!]$, pour choisir une partie A ∪ B de cardinal k de E et une partie C de E telles que A ∪ B ∪ C = E , il faut et il suffit de :

- choisir la sous-partie E_k de E de cardinal k telle que A ∪ B = E_k (C_n^k possibilités),
- choisir A et B tels que A ∪ B = E_k (3^k possibilités d'après le résultat de la question précédente),
- choisir $\overline{A\cup B}$ (1 possibilité), et :

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

- choisir une partie D de A ∪ B (2^k possibilités, A ∪ B étant de cardinal k).

On en déduit alors : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $Card(S_k) = C_n^k 3^k 2^k = C_n^k 6^k$,et donc, d'après ce qui précède :

$Card(S) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 6^k$ soit d'après la formule du binôme de Newton :

$= (1+6)^n$ et donc :

$= 7^n$ d'où la conclusion :

Il y a 7^n triplets (A, B, C) de parties de E telles que A ∪ B ∪ C = E

3. Montrons par récurrence que pour tout entier p supérieur ou égal à 2, le nombre de p-listes $(A_i)_{1 \le i \le p}$ de parties de E telles que $\bigcup_{i=1}^{p} A_i = E$ est $(2^p - 1)^n$:

· Au rang p = 2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et F un ensemble à n éléments. D'après le résultat de la question 1, il y a $3^n = (2^2-1)^n$ couples (A, B) de parties de F telles que A ∪ B = F. La propriété est donc bien vérifiée au rang p = 2.

· Soit $p \in [\![2, +\infty[\![$, supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $(2^p-1)^n$ p-listes $(A_i)_{1 \le i \le p}$ de parties d'un ensemble F à n éléments telles que $\bigcup_{i=1}^{p} A_i = F$.

Soient alors $q \in \mathbb{N}^*$ et G un ensemble à q éléments. Notons T l'ensemble des (p+1)-listes $(A_i)_{1 \le i \le p+1}$ de parties de G telles que $\bigcup_{i=1}^{p+1} A_i = G$ et, pour tout $k \in [\![0, q]\!]$, T_k l'ensemble des (p+1)-listes $(A_i)_{1 \le i \le p+1}$ de parties d'un ensemble G à n éléments telles que $\left(\bigcup_{i=1}^{p+1} A_i \right) = G$ et telles que $Card \left(\bigcup_{i=1}^{p} A_i \right) = k$. On a :

$T = \bigcup_{k=0}^{q} T_k$.

· L'union étant disjointe (pour toute (p+1)-listes $(A_i)_{1 \le i \le p+1}$ de parties de G, l'ensemble $\bigcup_{i=1}^{p} A_i$ ne peut avoir à la fois comme cardinal k et k' avec $k \neq k'$), on peut alors écrire :

$Card\ (T) = \sum_{k=0}^{q} Card(T_k)$.

Or, pour tout $k \in [\![0, q]\!]$, si $\bigcup_{i=1}^{p} A_i$ est une partie de cardinal k de G, pour avoir $\bigcup_{i=1}^{p+1} A_i = G$, il faut et il suffit de choisir A_{p+1} de telle sorte que A_{p+1} soit la réunion de $\bigcup_{i=1}^{p} A_i$ et d'une partie

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

de $\bigcup_{i=1}^{p} A_i$. Ainsi, pour tout $k \in [\![0, q]\!]$, pour choisir une famille $\{A_i,\ i \in [\![1, p+1]\!]\}$ de parties de G telles que Card $\left(\bigcup_{i=1}^{p} A_i\right)$ = k et $\bigcup_{i=1}^{p+1} A_i$ = G, il faut et il suffit de :

- choisir une sous-partie G_k de G de cardinal k telle que $\bigcup_{i=1}^{p} A_i = G_k$ (C_q^k possibilités),
- choisir les sous parties $\{A_i,\ i \in [\![1, p]\!]\}$ telles que $\bigcup_{i=1}^{p} A_i = G_k$ ($(2^p - 1)^k$ possibilités d'après l'hypothèse de récurrence avec F = G_k et n = k),
- choisir $\bigcup_{i=1}^{p} A_i$ (1 possibilité), et :
- choisir une partie H de G_k (2^k possibilités, G étant de cardinal k).

On en déduit alors :

$\forall k \in [\![1, p]\!]$, Card($T_k$) = C_q^k $(2^p - 1)^k 2^k = C_q^k (2^{p+1} - 2)^k$ et donc, d'après ce qui précède :

Card(T) = $\sum_{k=0}^{q} C_q^k (2^{p+1} - 2)^k$ soit d'après la formule du binôme de Newton :

= $(2^{p+1} - 1)^q$.

Ainsi pour tout $q \in \mathbb{N}^*$ et pour tout ensemble G de cardinal q, il existe $(2^{p+1} - 1)^q$ (p + 1)-listes $(A_i)_{1 \le i \le p+1}$ de parties de G, telles que $\bigcup_{i=1}^{p+1} A_i$ = G ce qui nous permet d'écrire que, si la propriété est vérifiée au rang p, elle l'est également au rang p+1.

On peut finalement conclure :

Pour tout $p \in [\![2, +\infty[\![$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $(2^p-1)^n$ p-listes $(A_i)_{1 \le i \le p}$ de parties d'un ensemble E de cardinal n telles que $\bigcup_{i=1}^{p} A_i$ = E.

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021