

Énoncés

Exercice 1.

Dans cet exercice, on envisage des codages binaires (successions de 0 et de 1). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note U_n le nombre de codages binaires à n chiffres se terminant par 1 et ne comportant jamais deux 0 consécutifs.

- Déterminer U_1 et U_2 .
- Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ U_{n+2} en fonction de U_{n+1} et U_n .

Exercice 2.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Une cour fermée est limitée par n murs discernables. On repeint chacun des murs avec une couleur tirée au hasard parmi un stock de p couleurs différentes ($p \geq 2$). Les choix des couleurs sont supposés mutuellement indépendants.

On note $N_{n,p}$ le nombre de façons de repeindre les murs de la cour de sorte qu'il n'y ait jamais deux murs consécutifs de la même couleur. Prouver que :

$$N_{n+2,p} = (p-2) N_{n+1,p} + (p-1) N_{n,p}.$$

Exercice 3.

Soit n un entier naturel non nul et E un ensemble à n éléments. En utilisant des raisonnements combinatoires :

1) Dénombrer les couples de parties (A,B) de E telles que $A \cup B = E$

2) Dénombrer les triplets de parties (A,B,C) de E telles que $A \cup B \cup C = E$

Montrer par récurrence que pour tout entier p supérieur ou égal à 2 et pour tout entier naturel n non nul, le nombre de p -listes $(A_i)_{1 \leq i \leq p}$ de parties d'un ensemble F à n éléments telles que $\bigcup_{i=1}^p A_i = F$ est $(2^p - 1)^n$.

Correction

Exercice 1.

1. Le seul codage à 1 chiffre se terminant par 1 est : « 1 ». Comme il ne comporte pas la séquence « 00 », on a :

$$U_1 = 1$$

De même, « 01 » et « 11 » conviennent d'où :

$$U_2 = 2$$

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A_{n+2} l'ensemble des codages binaires de $n+2$ chiffres se terminant par 1 et ne comportant jamais deux 0 consécutifs, B_{n+2} les codages de A_{n+2} dont l'avant dernier chiffre est 1 et C_{n+2} l'ensemble des codages de A_{n+2} dont l'avant dernier chiffre est 0. On a :

$$A_{n+2} = B_{n+2} \cup C_{n+2}$$

Cette union étant disjointe (l'avant-dernier chiffre d'un codage ne peut à la fois être 1 et 0), on a :

$$\text{Card } A_{n+2} = \text{Card } B_{n+2} + \text{Card } C_{n+2}$$

De plus :

-Card $A_{n+2} = U_{n+2}$ (par définition)

-Card $B_{n+2} = U_{n+1}$ (il y a autant de codages de $n+1$ chiffres finissant par 1 et ne comportant jamais deux 0 consécutifs que de codages de $n+2$ chiffres finissant par deux 1 et ne comportant jamais deux 0 consécutifs).

-Card $C_{n+2} = U_n$ (comme un codage de C_{n+2} ne comporte jamais la séquence « 00 », il finit nécessairement par « 101 ». Il y a donc 1 en $n^{\text{ème}}$ position).

Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, U_{n+2} = U_{n+1} + U_n$$

Exercice 2.

Notons :

- $A_{n+2,p}$ l'ensemble des façons de repeindre les $n+2$ murs d'une cour de telle sorte qu'il n'y ait jamais deux murs consécutifs de la même couleur,
- $B_{n+2,p}$ l'ensemble des façons de repeindre les $n+2$ murs d'une cour de telle sorte qu'il n'y ait jamais deux murs consécutifs de la même couleur et telles que le premier et le $(n+1)^{\text{ème}}$ mur soient de la même couleur,
- $C_{n+2,p}$ l'ensemble des façons de repeindre les $n+2$ murs de la cour de telle sorte qu'il n'y ait jamais deux murs consécutifs de la même couleur et telles que le premier et le $(n+1)^{\text{ème}}$ mur soient de couleurs différentes.

$$\text{On a : } A_{n+2,p} = B_{n+2,p} \cup C_{n+2,p}$$

et cette union étant disjointe : $\text{Card}(A_{n+2,p}) = \text{Card}(B_{n+2,p}) + \text{Card}(C_{n+2,p})$.

De plus :

- $\text{Card } A_{n+2,p} = N_{n+2,p}$ (par définition de $N_{n+2,p}$)
- $\text{Card } B_{n+2,p} = (p-1)N_{n,p}$ (il faut et il suffit de peindre les n premiers murs de sorte que le premier et le $n^{\text{ème}}$ mur soient de couleurs différentes - $N_{n,p}$ façons -, de peindre le $(n+1)^{\text{ème}}$ mur de la même couleur que le premier - 1 possibilité - puis de peindre le dernier mur d'une couleur différente de la couleur commune du premier et du $(n+1)^{\text{ème}}$ - $p-1$ possibilités -),
- $\text{Card } C_{n+2,p} = (p-2)N_{n+1,p}$ (il faut et il suffit de peindre les $n+1$ premiers murs de sorte que le premier et le $(n+1)^{\text{ème}}$ mur soient de couleurs différentes - $N_{n+1,p}$ façons - puis de peindre le dernier mur d'une couleur différente du premier et du $(n+1)^{\text{ème}}$ mur - $p-2$ possibilités -),

On peut maintenant conclure :

$$N_{n+2,p} = (p-2)N_{n+1,p} + (p-1)N_{n,p}$$

Exercice 3.

1. Soient R l'ensemble des couples (A, B) de parties de E telles que $A \cup B = E$ et pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, R_k l'ensemble des couples de parties (A, B) de E tels que $A \cup B = E$ et $\text{Card}(A) = k$.

$$\text{On a : } R = \bigcup_{k=0}^n R_k$$

L'union étant disjointe (une partie A donnée ne peut avoir à la fois comme cardinal k et k' avec $k \neq k'$), on peut alors écrire :

$$\text{Card}(R) = \sum_{k=0}^n \text{Card}(R_k)$$

Le raisonnement combinatoire

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, si A est une partie de cardinal k de E , pour avoir $A \cup B = E$, il faut et il suffit de choisir B de telle sorte que B soit la réunion de \bar{A} et d'une partie C de A .

Ainsi pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, pour choisir une partie A cardinal k de E et une partie B de E telles que $A \cup B = E$, il faut et il suffit de :

- choisir une partie A de cardinal k de E (C_n^k possibilités),
- choisir \bar{A} (1 possibilité), et :
- choisir une partie C de A (2^k possibilités, A étant de cardinal k).

On en déduit alors : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\text{Card}(R_k) = C_n^k 2^k$, et donc, d'après ce qui précède :

$$\begin{aligned} \text{Card}(R) &= \sum_{k=0}^n C_n^k 2^k \quad \text{soit d'après la formule du binôme de Newton :} \\ &= (1+2)^n \quad \text{et donc :} \\ &= 3^n \quad \text{d'où la conclusion :} \end{aligned}$$

Il y a 3^n couples (A, B) de parties de E telles que $A \cup B = E$

NB : On aurait également pu montrer qu'il y a autant de couples (A, B) convenables que d'applications de E dans $\{0, 1, 2\}$ qui à tout élément de $A \cap \bar{B}$ associe 0, de $B \cap \bar{A}$ associe 1 et de $A \cap B$ associe 2.

2. Soient S l'ensemble des triplets (A, B, C) de parties de E telles que $A \cup B \cup C = E$ et pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, S_k l'ensemble des triplets de parties (A, B, C) de E tels que :

$$A \cup B \cup C = E \text{ et } \text{Card}(A \cup B) = k. \text{ On a : } S = \bigcup_{k=0}^n S_k.$$

L'union étant disjointe (pour tout couple (A, B) de parties de E , $A \cup B$ ne peut avoir à la fois comme cardinal k et k' avec $k \neq k'$), on peut alors écrire : $\text{Card}(S) = \sum_{k=0}^n \text{Card}(S_k)$.

Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, si $A \cup B$ est une partie de cardinal k de E , pour avoir : $A \cup B \cup C = E$, il faut et il suffit que C soit la réunion de $\overline{A \cup B}$ et d'une partie D quelconque de $A \cup B$. Ainsi Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, pour choisir une partie $A \cup B$ de cardinal k de E et une partie C de E telles que $A \cup B \cup C = E$, il faut et il suffit de :

- choisir la sous-partie E_k de E de cardinal k telle que $A \cup B = E_k$ (C_n^k possibilités),
- choisir A et B tels que $A \cup B = E_k$ (3^k possibilités d'après le résultat de la question précédente),
- choisir $\overline{A \cup B}$ (1 possibilité), et :

Le raisonnement combinatoire

- choisir une partie D de $A \cup B$ (2^k possibilités, $A \cup B$ étant de cardinal k).

On en déduit alors : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\text{Card}(S_k) = C_n^k 3^k 2^k = C_n^k 6^k$, et donc, d'après ce qui précède :

$$\begin{aligned} \text{Card}(S) &= \sum_{k=0}^n C_n^k 6^k && \text{soit d'après la formule du binôme de Newton :} \\ &= (1+6)^n && \text{et donc :} \\ &= 7^n && \text{d'où la conclusion :} \end{aligned}$$

Il y a 7^n triplets (A, B, C) de parties de E telles que $A \cup B \cup C = E$

3. Montrons par récurrence que pour tout entier p supérieur ou égal à 2, le nombre de p -listes $(A_i)_{1 \leq i \leq p}$ de parties de E telles que $\bigcup_{i=1}^p A_i = E$ est $(2^p - 1)^n$:

- Au rang $p = 2$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et F un ensemble à n éléments. D'après le résultat de la question 1, il y a $3^n = (2^2 - 1)^n$ couples (A, B) de parties de F telles que $A \cup B = F$. La propriété est donc bien vérifiée au rang $p = 2$.
- Soit $p \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$, supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $(2^p - 1)^n$ p -listes $(A_i)_{1 \leq i \leq p}$ de parties d'un ensemble F à n éléments telles que $\bigcup_{i=1}^p A_i = F$.

Soient alors $q \in \mathbb{N}^*$ et G un ensemble à q éléments. Notons T l'ensemble des $(p+1)$ -listes $(A_i)_{1 \leq i \leq p+1}$ de parties de G telles que $\bigcup_{i=1}^{p+1} A_i = G$ et, pour tout $k \in \llbracket 0, q \rrbracket$, T_k l'ensemble des

$(p+1)$ -listes $(A_i)_{1 \leq i \leq p+1}$ de parties d'un ensemble G à n éléments telles que $\left(\bigcup_{i=1}^{p+1} A_i \right) = G$ et telles que $\text{Card} \left(\bigcup_{i=1}^p A_i \right) = k$. On a :

$$T = \bigcup_{k=0}^q T_k .$$

- L'union étant disjointe (pour toute $(p+1)$ -listes $(A_i)_{1 \leq i \leq p+1}$ de parties de G , l'ensemble $\bigcup_{i=1}^p A_i$ ne peut avoir à la fois comme cardinal k et k' avec $k \neq k'$), on peut alors écrire :

$$\text{Card}(T) = \sum_{k=0}^q \text{Card}(T_k) .$$

Or, pour tout $k \in \llbracket 0, q \rrbracket$, si $\bigcup_{i=1}^p A_i$ est une partie de cardinal k de G , pour avoir $\bigcup_{i=1}^{p+1} A_i = G$, il faut et il suffit de choisir A_{p+1} de telle sorte que A_{p+1} soit la réunion de $\bigcup_{i=1}^p A_i$ et d'une partie

Le raisonnement combinatoire

de $\bigcup_{i=1}^p A_i$. Ainsi, pour tout $k \in \llbracket 0, q \rrbracket$, pour choisir une famille $\{A_i, i \in \llbracket 1, p+1 \rrbracket\}$ de parties de G

telles que $\text{Card} \left(\bigcup_{i=1}^p A_i \right) = k$ et $\bigcup_{i=1}^{p+1} A_i = G$, il faut et il suffit de :

- choisir une sous-partie G_k de G de cardinal k telle que $\bigcup_{i=1}^p A_i = G_k$ (C_q^k possibilités),
- choisir les sous parties $\{A_i, i \in \llbracket 1, p \rrbracket\}$ telles que $\bigcup_{i=1}^p A_i = G_k$ ($(2^p - 1)^k$ possibilités d'après l'hypothèse de récurrence avec $F = G_k$ et $n = k$),
- choisir $\bigcup_{i=1}^p A_i$ (1 possibilité), et :
- choisir une partie H de G_k (2^k possibilités, G étant de cardinal k).

On en déduit alors :

$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \text{Card}(T_k) = C_q^k (2^p - 1)^k 2^k = C_q^k (2^{p+1} - 2)^k$ et donc, d'après ce qui précède :

$$\begin{aligned} \text{Card}(T) &= \sum_{k=0}^q C_q^k (2^{p+1} - 2)^k \quad \text{soit d'après la formule du binôme de Newton :} \\ &= (2^{p+1} - 1)^q. \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $q \in \mathbb{N}^*$ et pour tout ensemble G de cardinal q , il existe $(2^{p+1} - 1)^q$

$(p + 1)$ -listes $(A_i)_{1 \leq i \leq p+1}$ de parties de G , telles que $\bigcup_{i=1}^{p+1} A_i = G$ ce qui nous permet d'écrire que, si la propriété est vérifiée au rang p , elle l'est également au rang $p+1$.

On peut finalement conclure :

Pour tout $p \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $(2^p - 1)^n$ p -listes $(A_i)_{1 \leq i \leq p}$ de parties d'un ensemble E de cardinal n telles que $\bigcup_{i=1}^p A_i = E$.