Enoncés

Exercice 1

Au poker, avec un jeu de 52 cartes, déterminer le nombre total de mains de 5 cartes, puis le nombre de mains de 5 cartes contenant exactement :

- un brelan,
- un full,
- une paire.

Exercice 2

1) En considérant qu'une plaque minéralogique est constituée de quatre chiffres quelconques, suivis de deux lettres quelconques, puis de deux chiffres quelconques, déterminer le nombre total de plaques possibles ?

2) Déterminer le nombre de plaques minéralogiques dont tous les numéros et les lettres sont distincts deux à deux.

3) Déterminer le nombre de plaques minéralogiques dont les quatre premiers numéros sont dans l'ordre croissant strictement.

Exercice 3

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Une cour fermée est limitée par n murs discernables. On repeint chacun des murs avec une couleur tirée au hasard parmi un stock de p couleurs différentes ($p \geq 2$). Les choix des couleurs sont supposés mutuellement indépendants.

1) De combien de façons différentes peut-on repeindre l'ensemble des murs de la cour ?

2) **a)** On suppose que $n = 2$. Quel est le nombre de choix des couleurs tel que les deux murs soient de couleurs différentes ?

b) On suppose que $n = 3$. Quel est le nombre de choix des couleurs pour lesquels il n'y a jamais deux murs consécutifs de la même couleur ?

Exercice 4

Déterminer le nombre d'anagrammes des mots suivants :

a) Klub,
b) Prepa.

Exercice 5

On rappelle que le nombre de parties d'un ensemble à n éléments ($n \in \mathbb{N}^*$) est égal à 2^n. Retrouver ce résultat à l'aide d'un codage binaire.

Exercice 6

Pour tout couple (n,p) d'entiers naturels non nuls, on note $S_{n,p}$ le nombre de surjections d'un ensemble E_n à n éléments sur un ensemble F_p à p éléments, c'est à dire le nombre d'applications f de E_n vers F_p telles que tout élément de F_p admette au moins un antécédent par f dans E_n.

On rappelle que l'on désigne par partition d'un ensemble E, toute partie de P(E), $\{A_i, i \in I\}$ où I est une partie non vide de $\mathbb{N}$, telle que : $\forall i \in I$, $A_i \neq \emptyset$; $\forall (i,j) \in I^2$, $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ et $\bigcup_{i \in I} A_i = E$.

Pour tout couple (n,p) d'entiers naturels non nuls, on note également $r_{n,p}$ le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en p classes (c'est à dire en p sous-parties non vides).

Montrer que : $\forall (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $S_{n,p} = p!\,r_{n,p}$

Correction

Exercice 1

- Avec un jeux de 52 cartes, une main de 5 cartes étant une partie à 5 éléments d'un ensemble à 52 éléments, on peut conclure:

Il y a C_{52}^{5} =2 598 960 mains de 5 cartes dans un jeu de 52 cartes

- Une main contenant un brelan étant constituée de 3 cartes de même hauteur et de 2 autres cartes de hauteurs distinctes (à choisir parmi les 12 hauteurs de jeu restantes), pour choisir une main de 5 cartes contenant exactement un brelan, il faut et il suffit de:

-choisir la hauteur du brelan (13 possibilités),

-choisir les 3 cartes du brelan (C_{4}^{3} possibilités)

-choisir les hauteurs de chacune des 2 cartes restantes (C_{12}^{2} possibilités), et :

-choisir la couleur de chacune des 2 cartes de ces deux hauteurs (4 possibilités pour chacune d'entre elles, soit 4^2).

On peut désormais conclure:

Il y a $13\ C_{4}^{3}\ C_{12}^{2} 4^2$ = 54 912 mains de 5 cartes contenant exactement un brelan

- Une main contenant un full étant constituée d'un brelan et d'une paire, pour choisir une main de 5 cartes contenant un full, il faut et il suffit de :

-choisir les hauteurs du brelan et de la paire (A_{13}^{2} possibilités car les deux hauteurs doivent être distinctes et ordonnées, le brelan et la paire ne jouant pas de rôles symétriques),

-choisir les 3 cartes du brelan, correspondant à la première hauteur (C_{4}^{3} possibilités), et:

-choisir les 2 cartes de la paire, correspondant à la deuxième hauteur (C_{4}^{2} possibilités).

On peut alors conclure:

Il y a $A_{13}^{2}\ C_{4}^{3}\ C_{4}^{2}$ = 3 744 mains de 5 cartes contenant exactement un full

Une main contenant une paire étant constituée de 2 cartes de même hauteur (à choisir parmi les 13 hauteurs du jeu) et de 3 autres cartes de hauteurs distinctes (à choisir parmi les 12 hauteurs du jeu restantes), pour choisir une main de 5 cartes contenant exactement une paire, il faut et il suffit de :

- choisir la hauteur de la paire (13 possibilités)
- choisir les 2 cartes de la paire parmi les 4 cartes de la hauteur choisie (C_4^2 possibilités),
- choisir les hauteurs de chacune des 3 cartes restantes (C_{12}^3 possibilités), et :
- choisir la couleur de chacune des 3 cartes de ces trois hauteurs (4 possibilités pour chacune d'entre elles, soit 4^3).

On peut désormais conclure :

Il y a 13 $C_4^2\,C_{12}^3\,4^3$ = 1 098 240 mains de 5 cartes contenant exactement une paire

Exercice 2

1) Une plaque minéralogique étant constituée successivement d'une liste de 4 chiffres, d'un couple de lettres et d'un couple de chiffres, pour constituer une plaque, il faut et il suffit de :

-constituer une 4-liste de $[\![0,9]\!]$ (10^4 possibilités),

-constituer un couple de lettres (26^2 façons) et :

-constituer un couple de chiffres (10^2 façons).

Au total:

Il y $10^6 * 26^2$ plaques minéralogiques possibles

2) Pour déterminer une plaque minéralogique constituée de 4 numéros, 2 lettres et 2 numéros tous distincts deux à deux, il faut et il suffit de :

- Choisir une 4 – liste de numéros distincts de $[\![0,9]\!]$ (A_{10}^4 façons) puis de :
- Choisir une 2 – liste de lettres distinctes de l'alphabet (A_{26}^2 façons) et enfin de :
- Choisir une 2 – liste de numéros distincts et distincts des 4 premiers numéros choisis (A_6^2 façons).

On peut finalement conclure :

Il y a $A_{10}^4 . A_{26}^2 . A_6^2$ plaques minéralogiques constituées de numéros et de lettres distincts deux à deux.

3) Pour déterminer une plaque minéralogique dont les quatre premiers numéros sont rangés dans l'ordre croissant strictement, il faut et il suffit de :

- Choisir quatre numéros distincts de $[\![0,9]\!]$ (C_{10}^4 façons) puis de :
- Les ordonner dans l'ordre croissant (une façon) et de :
- Choisir les deux lettres (26^2 façons) et enfin de :
- Choisir les deux derniers chiffres (10^2 façons)

On peut finalement conclure :

> Il y a $C_{10}^4.26^2.10^2$ plaques minéralogiques dont les quatre premiers chiffres sont dans l'ordre strictement croissant.

Exercice 3

1) Pour repeindre chacun des n murs, il y a p possibilités. Les choix de couleur étant supposés indépendants, on peut écrire:

> Le nombre total de façons de peindre les murs est : p^n

2) **a)** Choisir les couleurs des deux murs de sorte qu'ils ne soient pas de la même couleur revient à constituer une 2-liste de couleurs parmi p, les murs étant supposés discernables. Il y a donc A_p^2 cas favorables, ce qui nous permet de conclure:

> Il y a p (p-1) choix des couleurs tel que les deux murs soient de couleurs différentes

b) Le troisième mur touchant le premier mur, aucun ne peut avoir la même couleur, et donc choisir les couleurs des trois murs de sorte qu'il n'y ait jamais deux murs consécutifs de la même couleur revient à constituer une 3-liste de couleurs parmi p, les murs étant discernables. Il y a donc A_p^3 cas favorables, ce qui nous permet de conclure:

> Il y a p (p-1) (p-2) choix de couleurs pour lesquels il n'y a jamais deux murs consécutifs de la même couleur.

Exercice 4

a) Une anagramme de « Klub » est une permutation des quatre lettres (distinctes) de ce mot, donc :

> Il y 4! Anagrammes de « Klub »

b) « Prepa » est constitué de quatre lettres distinctes , dont le « p » répété deux fois. Pour déterminer une anagramme de « Prepa »il faut et il suffit donc de :

- choisir la place des « P » (C_5^2 façons) puis de :
- effectuer une permutation des trois autres lettres, les rangeant dans l'ordre ainsi déterminé aux places restantes (3! façons).

On peut donc conclure :

$$\boxed{\text{Il y a } C_5^2.3! \text{ anagrammes de « Prepa »}}$$

Exercice 5

Soit E = $\{x_1 \ldots x_n\}$ et P une partie de E. En considérant une n-liste d'éléments de {0,1} et en choisissant de dire que le i^e élément (pour $i \in [\![1, n]\!]$) de cette liste vaut 0 si x_i n'appartient pas à P et vaut 1 sinon, on peut écrire qu'il y a autant de façons de construire P que de n-listes d'éléments de {0,1}, donc :

$$\boxed{\text{Il y a } 2^n \text{ parties d'un ensemble à n éléments}}$$

Exercice 6

Soient n et p deux entiers naturels non nuls. Pour construire une surjection f d'un ensemble E_n à n éléments sur un ensemble $F_p = \{x_i,\ i \in [\![1, p]\!]\}$ à p éléments, il faut et il suffit de :

- effectuer une partition en p classes de E_n, une classe donnée regroupant les éléments de E_n, ayant la même image ($r_{n,p}$ façons),
- construire une bijection de l'ensemble des p classes ainsi constitué sur F_p, l'image d'une classe par cette bijection représentant l'image commune des éléments de la classe (p! façons).

Ainsi, il ya $p!r_{n,p}$ surjections de E_n sur F_p. Comme $S_{n,p}$ est également le nombre de surjections de E_n vers F_p, on peut alors conclure :

$$\boxed{\forall (n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ S_{n,p} = p!r_{n,p}}$$