Chambre de Commerce et d'Industrie de Lyon

École Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1997

MATHÉMATIQUES

1ère épreuve (option économique)

Lundi 28 avril 1997 de 8 heures à 12 heures

Seules sont autorisées:

Une règle graduée.
Une calculatrice de poche pouvant être programmable et /ou alphanumérique, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de surface de base maximum de 21 cm de long sur 15 cm de large.

EXERCICE 1

Soient a, b, c trois réels tous non nuls, et M la matrice carrée d'ordre 3 suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{b} & \frac{a}{c} \\ \frac{b}{a} & 1 & \frac{b}{c} \\ \frac{c}{a} & \frac{c}{b} & 1 \end{pmatrix}.$$

1. a. Montrer : $M^2 = 3M$.

   b. En déduire que l'ensemble des valeurs propres de M est inclus dans $\{0, 3\}$.

2. a. Déterminer les valeurs propres de M et, pour chaque valeur propre, une base du sous-espace propre associé.

   b. La matrice M est-elle diagonalisable ?

On note :

$$P = \begin{pmatrix} a & a & a \\ b & -b & 0 \\ c & 0 & -c \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} & -\frac{2}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & -\frac{2}{c} \end{pmatrix}.$$

3. a. Calculer PQ. Montrer que P est inversible. Quel est son inverse ?

   b. Vérifier : $M = PDP^{-1}$.

4. Déterminer l'ensemble des matrices Y de $M_3(\mathbb{R})$ telles que $DY - YD = 3Y$.

5. Montrer que l'ensemble des matrices X de $M_3(\mathbb{R})$ telles que $MX - XM = 3X$ est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 2

Le but de l'exercice est l'étude des extremums de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,y) \longmapsto x^2 - 2xy + 2y^2 + e^{-x}$.

A. 1. Établir que l'équation $e^{-x} = x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, admet une solution et une seule.

2. Montrer qu'il existe $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ unique tel que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0 \end{cases}, \quad \text{et établir :} \quad \begin{cases} x_0 - e^{-x_0} = 0 \\ y_0 = \dfrac{x_0}{2} \end{cases}.$$

3. Montrer que f admet un extremum en (x_0, y_0).
   Est-ce un minimum ou un maximum ?

B. On note $g : [0 ; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{1+x}{1+e^x}$.

1. Montrer que l'équation $g(x) = x$, d'inconnue $x \in [0 ; +\infty[$, admet une solution et une seule, que celle-ci est x_0, et que $\frac{1}{2} < x_0 < 1$.

2. Former le tableau des variations de g et tracer sa courbe représentative (repère orthonormé, unité : 5 cm).

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = g(u_n)$.

3. Établir que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et converge vers x_0.

4. a. Montrer : $\forall x \in \left[\frac{1}{2} ; 1\right]$, $|g'(x)| \leq 0{,}125$, où g' désigne la dérivée de g.

   b. Établir : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n - x_0| \leq (0{,}125)^{n-1} \cdot 0{,}5$.

   c. En déduire une valeur approchée décimale de x_0 à 10^{-8} près.

   d. Montrer que $f(x_0, y_0) = \dfrac{x_0^2}{2} + x_0$, et en déduire une valeur approchée décimale à 10^{-7} près de $f(x_0, y_0)$.

EXERCICE 3

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et d'une pièce truquée telle que la probabilité d'apparition soit égale à p, $p \in]0;1[$.
On pourra noter $q = 1 - p$.

Soit N un entier naturel non nul fixé.
On effectue N lancers du dé ; si n est le nombre de «6» obtenus, on lance alors n fois la pièce.

On définit trois variables aléatoires X, Y, Z de la manière suivante :

Z indique le nombre de «6» obtenus aux lancers du dé,
X indique le nombre de «piles» obtenus aux lancers de la pièce,
Y indique le nombre de «faces» obtenues aux lancers de la pièce.

Ainsi, $X + Y = Z$ et, si Z prend la valeur 0, alors X et Y prennent la valeur 0.

1. Préciser la loi de Z, son espérance et sa variance.
2. Pour $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, déterminer la probabilité conditionnelle $P(X = k / Z = n)$.
   On distinguera les cas : $k \leq n$ et $k > n$.
3. Montrer, pour tout couple d'entiers naturels (k, n) :

   si $0 \leq k \leq n \leq N$, alors $P(X = k \text{ et } Z = n) = C_n^k C_N^n p^k (1-p)^{n-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^n$.

   si $n > N$ ou $k > n$, alors $P(X = k \text{ et } Z = n) = 0$.

4. Calculer la probabilité $P(X = 0)$.
5. Montrer pour tout couple d'entiers naturels (k, n) tel que $0 \leq k \leq n \leq N$:

   $$C_n^k C_N^n = C_N^k C_{N-k}^{n-k}.$$

   En déduire la probabilité $P(X = k)$.
6. Montrer que la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre $\left(N, \frac{p}{6}\right)$.
   Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ?
7. Est-ce que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes ?
   Déterminer la loi du couple (X,Y).
8. En comparant les variances de Z et de X+Y, déterminer la covariance du couple (X,Y).

EML 1997 - Maths III

Exercice 1

1) a) On a :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{b} & \frac{a}{c} \\ \frac{b}{a} & 1 & \frac{b}{c} \\ \frac{c}{a} & \frac{c}{b} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{b} & \frac{a}{c} \\ \frac{b}{a} & 1 & \frac{b}{c} \\ \frac{c}{a} & \frac{c}{b} & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{donc :}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & \frac{3a}{b} & 3\frac{a}{c} \\ \frac{3b}{a} & 3 & \frac{3b}{c} \\ \frac{3c}{a} & \frac{3c}{b} & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{soit finalement :}$$

$$\boxed{M^2 = 3M}$$

b) Soit λ une valeur propre de M, et X un vecteur propre non nul de M associé à la valeur propre λ. On a :

$MX = \lambda X$ donc, en multipliant à gauche par M :

$M^2 X = \lambda MX$ donc, comme $MX = \lambda X$:

$= \lambda^2 X$ d'où, comme, d'après le résultat précédent, $M^2 X = 3MX = 3\lambda X$:

$\lambda^2 X = 3\lambda X$ soit encore :

$\lambda(\lambda - 3)X = 0$ d'où, comme $X \neq 0$:

$\lambda(\lambda - 3) = 0$.

On peut alors conclure :

$$\boxed{\text{L'ensemble des valeurs propres de M est inclus dans } \{0, 3\}}$$

2) a) • 0 est valeur propre de M si, et seulement si, il existe un vecteur X non nul tel que $MX = 0$. Or, on a :

$$MX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{b} & \frac{a}{c} \\ \frac{b}{a} & 1 & \frac{b}{c} \\ \frac{c}{a} & \frac{c}{b} & 1 \end{pmatrix} X = 0 \qquad \text{donc } \left(L_2 \leftarrow L_2 - \frac{b}{a} L_1 \text{ et } L_3 \leftarrow L_3 - \frac{c}{a} L_1\right) :$$

$MX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{a}{b} & \frac{a}{c} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0$ soit, en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$\Leftrightarrow x + \frac{a}{b} y + \frac{a}{c} z = 0$ d'où :

$\Leftrightarrow bcx = -acy - abz$ soit finalement :

$\Leftrightarrow X \in \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} a \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -c \end{pmatrix}\right)$.

Ainsi, 0 est valeur propre de M, de sous-espace propre associé $E_0 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} a \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -c \end{pmatrix}\right)$.

- 3 est valeur propre de M si, et seulement si, il existe un vecteur X non nul tel que $(M - 3I)X = 0$. Or, on a :

$(M - 3I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & \frac{a}{b} & \frac{a}{c} \\ \frac{b}{a} & -2 & \frac{b}{c} \\ \frac{c}{a} & \frac{c}{b} & -2 \end{pmatrix} X = 0$ donc $(L_2 \leftarrow -2L_2 - \frac{b}{a} L_1$ et $L_3 \leftarrow -2L_3 - \frac{c}{a} L_1)$:

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & \frac{a}{b} & \frac{a}{c} \\ 0 & 3 & -\frac{3b}{c} \\ 0 & -\frac{3c}{b} & 3 \end{pmatrix} X = 0$ d'où $(L_3 \leftarrow L_3 - \frac{c}{b} L_2)$:

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & \frac{a}{b} & \frac{a}{c} \\ 0 & 3 & -\frac{3b}{c} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0$ soit, en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + \frac{a}{b} y + \frac{a}{c} z = 0 \\ 3y - \frac{3b}{c} z = 0 \end{cases}$ soit encore :

$(M - 3I)X = 0 \iff \begin{cases} 2bcx = acy + abz \\ cy = bz \end{cases}$ soit finalement :

$$\iff X \in \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Ainsi, 3 est valeur propre de M, de sous-espace propre associé $E_3 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. On peut finalement conclure :

$$\boxed{\text{0 et 3 sont valeurs propres de M, de sous-espaces propres associés respectifs } E_0 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} a \\ -b \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -c \end{pmatrix}\right) \text{ et } E_3 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.}$$

b) Comme $\dim E_0 + \dim E_3 = 3$ et comme $\dim \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = 3$, on peut alors conclure :

$$\boxed{\text{M est diagonalisable}}$$

3) a) ❁ On a :

$$PQ = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} a & a & a \\ b & -b & 0 \\ c & 0 & -c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} & -\frac{2}{b} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & -\frac{2}{c} \end{pmatrix}$$ donc :

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$ soit finalement :

$$\boxed{PQ = I}$$

❁ D'après le résultat de la question précédente, on peut également conclure :

$$\boxed{\text{P est inversible, d'inverse Q}}$$

b) D'après le résultat de la question 2a, P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dans une base constituée de vecteurs propres de M. On peut donc conclure :

$$\boxed{M = PDP^{-1}}$$

4) Soit Y un élément de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, écrit sous la forme $(y_{i,j})_{\substack{1\le i\le 3\\ 1\le j\le 3}}$. On a :

$$DY - YD = 3Y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} & y_{1,3} \\ y_{2,1} & y_{2,2} & y_{2,3} \\ y_{3,1} & y_{3,2} & y_{3,3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} & y_{1,3} \\ y_{2,1} & y_{2,2} & y_{2,3} \\ y_{3,1} & y_{3,2} & y_{3,3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} y_{1,1} & y_{1,2} & y_{1,3} \\ y_{2,1} & y_{2,2} & y_{2,3} \\ y_{3,1} & y_{3,2} & y_{3,3} \end{pmatrix}$$ i.e. :

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3y_{1,1} & 3y_{1,2} & 3y_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3y_{1,1} & 0 & 0 \\ 3y_{2,1} & 0 & 0 \\ 3y_{3,1} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y_{1,1} & 3y_{1,2} & 3y_{1,3} \\ 3y_{2,1} & 3y_{2,2} & 3y_{2,3} \\ 3y_{3,1} & 3y_{3,2} & 3y_{3,3} \end{pmatrix}$$ d'où :

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3y_{1,1} & 0 & 0 \\ 6y_{2,1} & 3y_{2,2} & 3y_{2,3} \\ 6y_{3,1} & 3y_{3,2} & 3y_{3,3} \end{pmatrix} = 0$$ soit finalement :

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & y_{1,2} & y_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

On peut finalement conclure :

> L'ensemble des matrices Y de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que DY - YD = 3Y est l'ensemble $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$

5) Soit X une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Comme $M = PDP^{-1}$ (cf question 3b), on a :

$MX - XM = 3X \Leftrightarrow PDP^{-1}X - XPDP^{-1} = 3X$ donc, en multipliant par P^{-1} à gauche et par P à droite, ces matrices étant inversibles :

$\Leftrightarrow DP^{-1}XP - P^{-1}XPD = 3P^{-1}XP$ donc, en posant $Y = P^{-1}XP$ (soit $X = PYP^{-1}$) :

$\Leftrightarrow DY - YD = 3Y$ d'où, comme $X = PYP^{-1}$:

$$\Leftrightarrow X \quad \text{Vect}\left(P\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}\right)$$

EML 1997 - Maths III

Exercice 1

La famille $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ étant libre et les matrices P et P^{-1} étant inversibles, la famille $\left(P\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}, P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}\right)$ est également libre, et l'on peut donc conclure :

$$\boxed{\text{L'ensemble des matrices } X \text{ de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ telles que } MX - XM = 3X \text{ est un espace vectoriel de dimension 2 sur } \mathbb{R}}$$

Exercice 2

A. 1) Soit h la fonction définie sur ℝ par : x ℝ, $h(x) = e^{-x} - x$. h est dérivable sur ℝ comme somme de fonctions dérivables sur ℝ, et on a :

x ℝ, $h'(x) = -(e^{-x} + 1)$ donc :

< 0.

Ainsi, h est continue et strictement décroissante sur ℝ donc, d'après le théorème de la bijection, réalise une bijection de ℝ sur h(ℝ) qui est un intervalle. Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$, f réalise donc une bijection de ℝ sur ℝ. Ainsi, comme 0 ℝ, l'équation h(x) = 0 admet une unique solution dans ℝ, et l'on peut conclure :

$$\boxed{\text{L'équation } e^{-x} = x \text{ admet une solution et une seule dans } \mathbb{R}}$$

2) f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ comme somme de fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$, et on a :

$(x, y)\ \mathbb{R}^2$, $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 2y - e^{-x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2x + 4y \end{cases}$ donc, pour $(x, y)\ \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y - e^{-x} = 0 \\ -2x + 4y = 0 \end{cases}$$

soit encore :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - e^{-x} = 0 \\ y = \dfrac{x}{2} \end{cases}.$$

L'équation $x - e^{-x} = 0$ admettant une unique solution dans ℝ, on peut désormais conclure :

$$\boxed{\text{Il existe un unique } (x_0, y_0)\ \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \text{ et celui-ci vérifie : } \begin{cases} x_0 - e^{-x_0} = 0 \\ y_0 = \dfrac{x_0}{2} \end{cases}}$$

3) • f étant de classe C^2 sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, elle ne peut admettre d'extremum qu'en un point (x, y) annulant ses dérivées partielles d'ordre 1. Ainsi, d'après le résultat de la question précédente, f ne peut admettre d'extremum qu'en (x_0, y_0). De plus, on a :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 + e^{-x} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -2 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 4 \end{cases}$$

donc, en utilisant les notations de Monge en (x_0, y_0) :

$$\begin{cases} r = 2 + e^{-x_0} \\ s = -2 \\ t = 4 \end{cases}.$$

On a donc : $rt - s^2 = 4(1 + e^{-x_0})$, donc $rt - s^2 > 0$. On peut donc conclure :

$$\boxed{\text{f admet un extremum en } (x_0, y_0)}$$

• Comme $r > 0$, on peut également conclure :

$$\boxed{\text{f admet un minimum en } (x_0, y_0)}$$

B. 1) • Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$g(x) = x \Leftrightarrow \dfrac{1+x}{1+e^x} = x$ soit encore :

$\Leftrightarrow 1 + x = x + xe^x$ i.e. :

$\Leftrightarrow xe^x = 1$ donc, comme $e^x > 0$:

$\Leftrightarrow x = e^{-x}$.

D'après le résultat de la question A.1, on peut donc conclure :

$$\boxed{\text{L'équation } g(x) = x \text{ admet } x_0 \text{ pour unique solution sur } \mathbb{R}}$$

• On a :

$g(1) - 1 = \dfrac{2}{1+e} - 1$ donc :

$= \dfrac{1-e}{1+e}$ d'où, comme $e > 1$:

< 0 et :

$g\left(\dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2(1+\sqrt{e})} - \dfrac{1}{2}$ donc :

$$g\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{2-\sqrt{e}}{2(1+\sqrt{e})}$$ d'où, comme $e < 4$:

> 0.

Ainsi, la fonction $x \mapsto g(x) - x$ change de signe sur $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$. Comme elle y est continue, on peut donc écrire, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, qu'elle admet un zéro sur $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$. Comme elle admet un unique zéro sur $\mathbb{R}$, on peut finalement conclure :

$$\boxed{\frac{1}{2} < x_0 < 1}$$

N.B. : On pouvait également démontrer ce résultat à l'aide de la fonction h étudiée dans la question A.1 (ce qui était d'ailleurs plus rapide).

2) • g est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ comme quotient, dont le dénominateur ne s'annule pas, de fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$, et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ g'(x) = \frac{1+e^x-(1+x)e^x}{(1+e^x)^2}$$ soit :

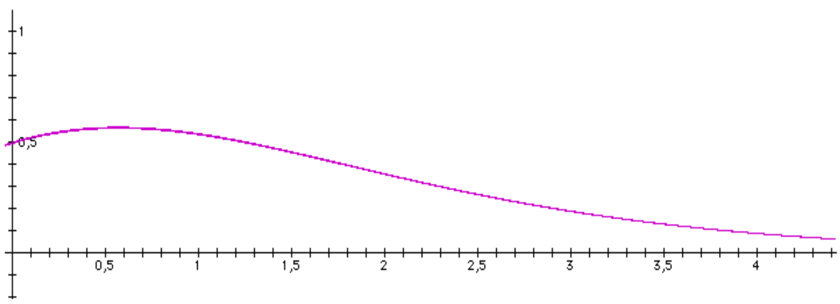
$$= \frac{1-xe^x}{(1+e^x)^2}$$ et donc :

$$= \frac{e^x(e^{-x}-x)}{(1+e^x)^2}.$$

x_0 est donc l'unique solution de l'équation $g'(x) = 0$, et l'on peut donc dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}^+$ (avec : $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$, par croissances comparées) :

x	0		x_0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	x_0	$\searrow$	0

• On peut alors tracer la courbe représentative de g sur $\mathbb{R}^+$:



3) ❖ ❖ Montrons par récurrence que, pour tout n $\mathbb{N}$, la proposition $P(n)$: "$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq x_0$" est vraie.

• Au rang $n = 0$. Comme $u_0 = 0$, on a $u_1 = g(u_0) = \frac{1}{2}$, et donc, comme $x_0 \geq \frac{1}{2}$:

$0 \leq u_0 \leq u_1 \leq x_0$

Ainsi, $P(0)$ est vraie.

• Soit n $\mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ soit vraie. g étant croissante sur $[0, x_0]$, on peut alors écrire :

$g(0) \leq g(u_n) \leq g(u_{n+1}) \leq g(x_0)$ d'où, comme $g(0) \geq 0$:

$0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq x_0$.

Ainsi, si $P(n)$ est vraie, $P(n+1)$ l'est également.

• On a donc : n $\mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq x_0$.

❖ Ainsi, on a :

n $\mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$.

On peut alors conclure :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n \; \mathbb{N}} \text{ est croissante}}$$

❖ La suite $(u_n)_{n \; \mathbb{N}}$ étant croissante et majorée (par x_0), elle converge vers une limite ℓ positive ou nulle. De plus, g étant continue sur $\mathbb{R}^+$, ℓ est solution de l'équation $g(x) = x$. x_0 étant l'unique solution de cette équation, on peut finalement conclure :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n \; \mathbb{N}} \text{ converge vers } x_0}$$

4) a) On a :

$$x \; \mathbb{R}^+, \; g'(x) = \frac{1 - xe^x}{(1+e^x)^2}.$$

g' est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme quotient, dont le dénominateur ne s'annule pas, de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^+$, et on a :

$$x \; \mathbb{R}^+, \; g''(x) = \frac{-(e^x + xe^x)(1+e^x)^2 - (1 - xe^x)2e^x(1+e^x)}{(1+e^x)^4} \quad \text{soit :}$$

$$= -e^x \frac{(1+x)(1+e^x) + 2(1-xe^x)}{(1+e^x)^3} \quad \text{donc :}$$

Exercice 2

$x \ \mathbb{R}^{+}$, $g''(x) = -e^{x}\dfrac{3+x+(1-x)e^{x}}{(1+e^{x})^{3}}$ d'où :

$x \ \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$, $g''(x) \leq 0$.

Ainsi, g' est décroissante sur $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$. On a donc :

$x \ \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$, $g'(1) \leq g'(x) \leq g'\left(\dfrac{1}{2}\right)$ i.e. :

$x \ \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$, $\dfrac{1-e}{(1+e)^{2}} \leq g'(x) \leq \dfrac{2-\sqrt{e}}{2(1+\sqrt{e})^{2}}$ soit, après calcul :

$x \ \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$, $-0{,}1242 \leq g'(x) \leq 0{,}025$ soit finalement :

$$\boxed{x \ \left[\dfrac{1}{2}, 1\right], \ |g'(x)| \leq \dfrac{1}{8}}$$

b) g étant continue sur $\left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$ et dérivable sur $\left]\dfrac{1}{2}, 1\right[$, on peut alors écrire, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$x \ \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$, $|g(x) - g(x_0)| \leq \dfrac{1}{8}|x - x_0|$ soit encore, comme $g(x_0) = x_0$:

$x \ \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]$, $|g(x) - x_0| \leq \dfrac{1}{8}|x - x_0|$ (1).

Or, la suite $(u_n)_{n \ \mathbb{N}}$ étant croissante, on a : $n \ \mathbb{N}^*$, $u_n \geq u_1$, donc, comme $u_1 = \dfrac{1}{2}$:

$n \ \mathbb{N}^*$, $u_n \geq \dfrac{1}{2}$.

D'après (1), on a donc, comme : $n \ \mathbb{N}^*$, $g(u_n) = u_{n+1}$:

$n \ \mathbb{N}^*$, $|u_{n+1} - x_0| \leq \dfrac{1}{8}|u_n - x_0|$ (2).

Montrons alors par récurrence que : $n \ \mathbb{N}^*$, $|u_n - x_0| \leq \dfrac{1}{8^{n-1}}|u_1 - x_0|$.

• Au rang n = 1. Comme $\dfrac{1}{8^{0}} = 1$, la propriété est bien vérifiée au rang n = 0.

• Soit n $\mathbb{N}^*$. Supposons que : $|u_n - x_0| \leq \frac{1}{8^{n-1}} |u_1 - x_0|$. D'après (2), on a :

$|u_{n+1} - x_0| \leq \frac{1}{8} |u_n - x_0|$ donc, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\leq \frac{1}{8^n} |u_1 - x_0|.$$

Ainsi, la propriété est vérifiée au rang $n + 1$.

• On a donc : n $\mathbb{N}^*$, $|u_n - x_0| \leq \frac{1}{8^{n-1}} |u_1 - x_0|$.

⁕ Comme u_1 et x_0 appartiennent à $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, on a également : $|u_1 - x_0| \leq \frac{1}{2}$. On peut finalement conclure :

$$\boxed{n \ \mathbb{N}^*, \ |u_n - x_0| \leq \frac{1}{2 \cdot 8^{n-1}}}$$

c) D'après le résultat de la question précédente, pour que u_n constitue une valeur approchée de x_0 à 10^{-8} près, il suffit que n vérifie : $\frac{1}{2 \cdot 8^{n-1}} \leq 10^{-8}$. Or, on a :

$\frac{1}{2 \cdot 8^{n-1}} \leq 10^{-8} \Leftrightarrow \frac{10^8}{2} \leq 8^{n-1}$ donc, en composant par ln, croissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$\Leftrightarrow 8 \ln 10 - \ln 2 \leq (n - 1) \ln 8$ d'où :

$\Leftrightarrow n \geq \frac{8 \ln 10 - \ln 2}{\ln 8} + 1$ soit, après calcul (effectué à la calculatrice) :

$\Leftrightarrow n \geq 9{,}525.$

Ainsi, u_{10} constitue une valeur approchée de x_0 à 10^{-8} près. On peut donc conclure :

$$\boxed{x_0 = 0{,}56714329 \pm 10^{-8}}$$

d) ⁕ On a :

$f(x_0, y_0) = x_0^2 - 2x_0 y_0 + 2y_0^2 + e^{-x_0}$ d'où, comme $y_0 = \frac{x_0}{2}$ et $x_0 = e^{-x_0}$:

$$\boxed{f(x_0, y_0) = \frac{x_0^2}{2} + x_0}$$

❖ D'après le résultat de la question précédente, on peut alors écrire, après calculs :

$$\boxed{f(x_0, y_0) = 0{,}7279690 \pm 10^{-7}}$$

Exercice 3

1) Z est la variable aléatoire égale au nombre de succès (obtenir un “6” à un lancer donné) dans une suite de N épreuves indépendantes à deux issues de même probabilité de succès égale à $\frac{1}{6}$. On peut donc conclure :

$$\boxed{Z \text{ suit une loi binomiale de paramètres } N \text{ et } \frac{1}{6}\text{, et on a : } E(Z) = \frac{N}{6} \text{ et } V(Z) = \frac{5N}{36}}$$

2) On suppose que n $[\![0, N]\!]$ (en effet, si n est strictement supérieur à N, l’événement [Z = n] est impossible). Deux cas se présentent alors :

• si k > n. Si l’événement [Z = n] est réalisé, on effectue n lancers de la pièce. Le nombre de “piles” obtenu est donc inférieur ou égal à n. On a donc :

$k \quad [\![n + 1, +\infty[\![, \; p(X = k / Z = n) = 0,$

• si k ≤ n. Sachant que l’événement [Z = n] est réalisé, la variable aléatoire X indique le nombre de succès (obtenir pile) dans une suite de n épreuves indépendantes à deux issues de même probabilité de succès égale à p. Ainsi, la loi conditionnelle de X sachant Z = n est la loi binomiale de paramètres n et p. On a donc :

$k \quad [\![0, n]\!], \; p(X = k / Z = n) = C_n^k \, p^k (1 - p)^{n-k}.$

On peut alors conclure :

$$\boxed{n \quad [\![0, N]\!], \; \begin{cases} k \geq n + 1, \; p(X = k / Z = n) = 0 \\ \\ k \quad \{0,..,n\}, \; p(X = k / Z = n) = C_n^k \, p^k (1 - p)^{n-k} \end{cases}}$$

NB : si n > N, la probabilité conditionnelle envisagée n'a pas de sens.

3) ⚬ On a :

$n \quad [\![0, N]\!], \quad k \quad [\![0, n]\!], \; p\big([X = k] \cap [Z = n]\big) = p(Z = n)\, p(X=k/Z=n)$ donc, d'après les questions 1 et 2 :

$$\boxed{\text{Si } 0 \leq k \leq n \leq N, \; p\big([X = k] \cap [Z = n]\big) = C_n^k \, C_N^n \, p^k (1 - p)^{n-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^n}$$

⚬ Deux cas se présentent :

• si n > N, l’événement [Z = n] est impossible, donc :

$p\big([X = k] \cap [Z = n]\big) = 0$,

• si $n \leq N$ et si $k > n$, on a alors, d'après le résultat de la question précédente : $p(X=k/Z=n) = 0$, et donc :

$p\big([X = k] \cap [Z = n]\big) = 0$.

On peut alors conclure :

$$\boxed{\text{Si } n > N \text{ ou } k > n,\ p\big([X = k] \cap [Z = n]\big) = 0}$$

4) Comme Z prend ses valeurs dans $\llbracket 0, N \rrbracket$, on a :

$p(X = 0) = \sum_{n=0}^{N} p([X = 0] \cap [Z = n])$ donc, d'après le résultat de la question précédente :

$= \sum_{n=0}^{N} C_n^0\, C_N^n\, p^0 (1 - p)^{n-0} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^n$ soit encore :

$= \sum_{n=0}^{N} C_N^n \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1-p}{6}\right)^n$ d'où, d'après la formule du binôme de Newton :

$= \left(\frac{5}{6} + \frac{1-p}{6}\right)^N$ soit finalement :

$$\boxed{p(X = 0) = \left(1 - \frac{p}{6}\right)^N}$$

5) ✽ On a :

$n \ \llbracket 0, N \rrbracket,\quad k \ \llbracket 0, n \rrbracket,\ C_n^k\, C_N^n = \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{N!}{n!(N-n)!}$ soit encore :

$= \frac{N!}{k!} \times \frac{1}{(n-k)!(N-n)!}$ donc, en multipliant et en divisant par $(N - k)!$:

$= \frac{N!}{k!(N-k)!} \times \frac{(N-k)!}{(n-k)!(N-n)!}$ soit finalement :

$$\boxed{n \ \llbracket 0, N \rrbracket,\quad k \ \llbracket 0, n \rrbracket,\ C_n^k\, C_N^n = C_N^k\, C_{N-k}^{n-k}}$$

Exercice 3 **EML 1997 - Maths III**

* Comme Z prend ses valeurs dans ⟦0, N⟧, X prend ses valeurs dans ⟦0, N⟧. De plus, on a :

$\forall k \in [\![0, N]\!],\ p(X = k) = \sum_{n=0}^{N} p([X = k] \cap [Z = n])$ donc, d'après le résultat de la question 3 :

$= \sum_{n=k}^{N} C_n^k C_N^n p^k (1 - p)^{n-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^n$ d'où, d'après le résultat précédent :

$= C_N^k p^k \sum_{n=k}^{N} C_{N-k}^{n-k} (1 - p)^{n-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^n$ donc, en effectuant le changement d'indice n' = n - k :

$= C_n^k p^k \sum_{n=0}^{N-k} C_{N-k}^{n} (1 - p)^{n} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n-k} \left(\frac{1}{6}\right)^{n+k}$ soit encore :

$= C_N^k \left(\frac{p}{6}\right)^k \sum_{n=0}^{N-k} C_{N-k}^{n} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-k-n} \left(\frac{1-p}{6}\right)^{n}$ d'où, d'après la formule du binôme de Newton :

$= C_N^k \left(\frac{p}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6} + \frac{1-p}{6}\right)^{N-k}$ soit finalement :

$$\boxed{\forall k \in [\![0, N]\!],\ p(X = k) = C_N^k \left(\frac{p}{6}\right)^k \left(1 - \frac{p}{6}\right)^{N-k}}$$

6) * D'après le résultat de la question précédente, on peut alors conclure :

$$\boxed{\text{X suit la loi binomiale de paramètres N et } \frac{p}{6}}$$

* En substituant Y à X et 1 - p à p dans le raisonnement précédent, on peut également conclure :

$$\boxed{\text{Y suit la loi binomiale de paramètres N et } \frac{1-p}{6}}$$

7) * D'après le résultat de la question précédente, on a :

$p(X = N)\,p(Y = N) = \left(\frac{p}{6}\right)^N \left(\frac{1-p}{6}\right)^N$.

De plus, comme X + Y = Z, et comme Z prend ses valeurs dans ⟦0, N⟧, on a :

$p([X = N] \cap [Y = N]) = 0$.

On peut donc conclure :

$$\boxed{\text{X et Y ne sont pas indépendantes}}$$

* Comme X+Y=Z, on a :

$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, p([X = i] \cap [Y = j]) = p([X = i] \cap [Z = i + j])$.

D'après le résultat des questions 1 et 2, on peut alors conclure

$$\boxed{\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, p([X = i] \cap [Y = j]) = \begin{cases} C_{i+j}^{i} C_N^{i+j} p^i (1-p)^j \left(\frac{5}{6}\right)^{N-i-j} \left(\frac{1}{6}\right)^{i+j} & \text{si } i+j \leq N \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

8) Comme Z = X + Y, on a :

$V(X + Y) = V(Z)$ soit :

$V(X) + V(Y) + 2\,\mathrm{cov}(X, Y) = V(Z)$ donc :

$\mathrm{cov}(X, Y) = \dfrac{V(Z) - V(X) - V(Y)}{2}$ donc, d'après le résultat des questions 1 et 6 :

$= \dfrac{\frac{5N}{36} - \frac{Np(6-p)}{36} - \frac{N(1-p)(5+p)}{36}}{2}$ soit, après simplifications :

$$\boxed{\mathrm{cov}(X, Y) = \frac{Np(1-p)}{36}}$$