Le raisonnement combinatoire

Enoncés

Exercice 1

On permute au hasard les n tomes discernables d'une encyclopédie ($n \in [\![2,+\infty[\![$).

Déterminer la probabilité que les tomes 1 et 2 se retrouvent côte à côte dans cet ordre ?

Exercice 2

On considère les événements A et B définis par :

A : « on obtient au moins un as en lançant 6 fois un dé à 6 faces »
B : « on obtient au moins un double as en lançant 6 fois deux dés discernables à six faces ».

Quel est, de A et de B, l'événement le plus probable ?

Exercice 3

On effectue une suite de n tirages ($n\in\mathbb{N}^*$) sans remise, dans une urne contenant p boules ($p\geq n$) numérotées de 1 à p.

Déterminer la probabilité que les n boules tirées soient obtenues dans l'ordre croissant des numéros.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Correction

Exercice 1

Il y a autant de permutations possibles de n encyclopédies que de permutations de $[\![1, n]\!]$, soit n! (car les encyclopédies sont discernables).

Par ailleurs, pour déterminer une permutation des n encyclopédies telle que les tomes 1 et 2 soient côte à côte, dans cet ordre, il faut et il suffit de :

- Déterminer, parmi les places 1,2…,n-1, la place du tome 1 (n-1 possibilités) puis de :
- Placer le tome 2 à côté du tome 1 (1 façon) et de :
- Permuter les n-2 tomes restants dans les n – 2 emplacements restants ((n-2)! façons)

Ainsi, il y a au total (n-1)! permutations des tomes de l'encyclopédie telles que les tomes 1 et 2 soient côte à côte, dans cet ordre. Les n! permutations possibles étant équiprobables, on peut alors conclure :

> La probabilité que les tomes 1 et 2 se retrouvent côte à côte, dans cet ordre, est égale à $\frac{1}{n}$

Exercice 2

i) L'événement $\overline{A}$ est réalisé si, et seulement si, l'on n'a jamais obtenu d'as dans la suite de tirages. Or il y a 6^6 suites de tirages possibles, toutes équiprobables, et 5^6 suites de tirages favorables à la réalisation de $\overline{A}$, donc :

$$p(\overline{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^6.$$

On a donc $p(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6$.

ii) De même l'événement $\overline{B}$ est réalisé si, et seulement si, l'on n'a jamais obtenu de double as dans la suite de tirages. Or, les deux dés étant discernables, il y a $6^2=36$ résultats possibles à chaque lancer, dont un double as. Il y a donc 36^6 suites de lancers possibles, toutes équiprobables, parmi lesquelles 35^6 mènent à la réalisation de $\overline{B}$. On a donc :

$$p(\overline{B}) = \left(\frac{35}{36}\right)^6 \qquad \text{d'où}$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

$$p(B) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^6.$$

iii) On peut alors écrire :

$$p(A) \geq p(B) \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^6 \geq 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^6 \quad \text{i.e. :}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^6 \leq \left(\frac{35}{36}\right)^6.$$

La fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{6}}$ étant croissante et bijective de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$, on peut alors écrire :

$$p(A) \geq p(B) \Leftrightarrow \frac{5}{6} \leq \frac{35}{36} \qquad \text{d'où}$$

$$\Leftrightarrow 6 \leq 7.$$

Cette dernière proposition étant vraie, on peut alors conclure :

A est plus probable que B

Exercice 3

Une suite de n tirages dans l'urne est une n–liste d'éléments distincts de $[\![1, p]\!]$. Il y a donc A_p^n suites de tirages possibles équiprobables.

De plus, pour déterminer une suite de n tirages telle que les numéros des n boules soient obtenus dans l'ordre croissant, il faut et il suffit de :

- Déterminer les n numéros obtenus (C_p^n façons) puis de
- Les ordonner dans l'ordre croissant (1 façon)

Ainsi, il y a C_p^n suite de tirages favorables à la réalisation de l'événement considéré. On peut finalement conclure :

La probabilité que les boules soient obtenues dans l'ordre croissant des numéros est $\dfrac{A_p^n}{C_p^n} = \dfrac{1}{n!}$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021