Raisonnement probabiliste

Enoncé

Exercice 1

On lance une pièce équilibrée deux fois de suite. On note A l'événement « le premier lancer donne pile », B l'événement « le second lancer donne face » et C l'événement « on obtient un pile et un face lors des lancers de la pièce ».

Les événements A, B et C sont-ils deux à deux indépendants ? Sont-ils mutuellement indépendants ?

Exercice 2

A quelle condition nécessaire et suffisante deux événements peuvent-ils être incompatibles et indépendants ? Que peut-on en déduire sur deux événements de probabilité non nulle ?

Correction

Exercice 1

▲ La pièce étant équilibrée, on peut obtenir pile ou face de manière équiprobable, et donc : $p(A) = p(B) = \frac{1}{2}$. De plus, il y a deux façons d'obtenir un pile et un face lors des lancers (pile puis face ou face puis pile). Comme il y a $2^2=4$ suites de deux lancers possibles, on en déduit alors, chacune de ces suites pouvant être obtenue de manière équiprobable : $p(C) = \frac{2}{4}$, soit : $p(C) = \frac{1}{2}$.

En outre, $A \cap B$ est réalisé si et seulement si un pile est obtenu au premier lancer et un face au second, d'où, les lancers étant équiprobables : $p(A \cap B) = \frac{1}{4} = p(A)p(B)$. De même, $A \cap C$ est réalisé si et seulement si un pile est obtenu au premier lancer et un face au second, donc, les lancers étant équiprobables : $p(A \cap C) = \frac{1}{4} = p(A)p(C)$. Enfin, $B \cap C$ est réalisé si et seulement si un pile est obtenu au premier lancer et un face au second. D'où les lancers étant équiprobables : $p(B \cap C) = \frac{1}{4} = p(B)p(C)$. On peut maintenant conclure :

A, B et C sont deux à deux indépendants.

▲ $A \cap B \cap C$ est réalisé si et seulement si un pile est obtenu au premier lancer et un face au second. Comme il y a 4 suites de deux lancers possibles et comme chacune de ces suites peut être obtenue de manière équiprobable, on a donc :

$p(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4}$.

On peut donc maintenant conclure :

A, B, et C ne sont pas mutuellement indépendants.

Exercice 2

▲ A et B sont deux événements incompatibles et indépendants si et seulement si $p(A \cap B)=0$ et $p(A \cap B)=p(A)p(B)$, soit si et seulement si $p(A)=0$ ou $p(B)=0$. D'où la conclusion :

Deux événements sont incompatibles et indépendants si et seulement si l'un au moins est quasi-impossible

▲ D'après le résultat précédent, les événements ne peuvent être à la fois indépendants et incompatibles. D'où la conclusion :

Deux événements de probabilité non nulle ne peuvent être indépendants et incompatibles.

