Le tireur et la cible

Enoncé

Dans un stand de tir, un tireur T effectue une série de tirs indépendants. Chaque tir a une probabilité $p \in]0,1[$ d'atteindre la cible.

Le tireur joue selon les règles suivantes : il a gagné (événement W) dès que le nombre de tirs dans la cible est égal au nombre de tirs en dehors de la cible, plus deux; il a perdu (événement L) dès que le nombre de tirs dans la cible est égal au nombre de tirs en dehors de la cible, moins deux ; la partie s'arrête si, et seulement si, l'un des deux événements W ou L se produit.

On considère, en outre, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les événements suivants :
- S_n l'événement : "le $n^{ème}$ tir est dans la cible",
- E_n l'événement : "le $n^{ème}$ tir est en dehors de la cible",
- Z_n l'événement : "la partie n'est pas terminée à l'issue du $n^{ème}$ tir ",
- W_n l'événement : "le tireur a gagné à l'issue du $n^{ème}$ tir",
- L_n l'événement : "le tireur a perdu à l'issue du $n^{ème}$ tir",

et on notera, dans la suite du problème : q=1-p et u=2pq.

1) Exprimer les événements Z_2 et Z_4 en fonction des événements S_1, S_2, S_3, S_4, E_1, E_2,E_3, E_4, puis calculer la probabilité des événements Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 puis pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, celle de l'événement Z_n.

2) a) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité des événements W_n et L_n.

b) En déduire les probabilités w et ℓ des événements W et L, puis la probabilité que la partie ne s'arrête pas.

3) On adopte désormais de nouvelles règles, où l'on considère que le tireur a perdu (événement M) si le nombre de tirs à l'intérieur de la cible est égal au nombre de tirs en dehors de la cible, moins trois. On considère qu'il a gagné (événement W) dès que le nombre de tirs dans la cible est égal au nombre de tirs en dehors de la cible, plus deux.

On considérera, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les événements suivants :

- A_n l'événement : "à l'issue du $n^{ème}$ tir, le nombre de tirs à l'intérieur de la cible est égal au nombre de tirs en dehors de la cible, plus un",

- B_n l'événement : "à l'issue du $n^{ème}$ tir, le nombre de tirs à l'intérieur de la cible est égal au nombre de tirs en dehors de la cible",

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

- C_n l'événement : "à l'issue du $n^{ème}$ tir, le nombre de tirs à l'intérieur de la cible est égal au nombre de tirs en dehors de la cible, moins un",

- D_n l'événement : "à l'issue du $n^{ème}$ tir, le nombre de tirs à l'intérieur de la cible est égal au nombre de tirs en dehors de la cible, moins deux",

On notera pour tout $n \in \mathbb{N}^*, a_n, b_n, c_n$ et d_n, les probabilités respectives de ces événements. On suppose que les séries de terme général a_n, b_n, c_n et d_n sont convergentes, et on note a, b, c et d leurs sommes respectives. On pose également : $a_0 = c_0 = d_0 = 0$ et $b_0 = 1$.

a) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, a_n, b_n, c_n$ et d_n en fonction de $a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}$ et d_{n-1}.

b) En déduire quatre relations entre a, b, c et d, puis calculer a et d.

c) En déduire les probabilités w et m des événements W et M, puis en déduire la probabilité que la partie ne s'arrête pas.

d) Montrer qu'il existe une unique valeur de p telle que $w = m$.

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Correction

1) On a, Z_2 étant réalisé si, et seulement si, il y a un tir réussi et un tir raté :

$Z_2 = [S_1 \cap E_2] \cup [E_1 \cap S_2]$.
Et de même :

$Z_4 = ([S_1 \cap E_2] \cup [E_1 \cap S_2]) \cap ([S_3 \cap E_4] \cup [E_3 \cap S_4])$.

Donc :

$$\boxed{Z_4 = ([S_1 \cap E_2] \cap [S_3 \cap E_4]) \cup ([S_1 \cap E_2] \cap [E_3 \cap S_4]) \cup ([E_1 \cap S_2] \cap [S_3 \cap E_4]) \cup ([E_1 \cap S_2] \cap [E_3 \cap S_4])}.$$

Comme la partie ne peut se terminer en une seule partie :

$$\boxed{p(Z_1) = 0}$$

D'après la question précédente, les événements étant incompatibles :

$$\begin{aligned} p(Z_2) &= p(S_1 \cap E_2) + p(E_1 \cap S_2) \\ &= p(S_1)\, p(E_2) + p(E_1)\, p(E_2) \end{aligned}$$ événements indépendants

Donc :

$$\boxed{p(Z_2) = 2p(1-p)}$$

On a : $Z_2 = Z_3$. En effet, la partie n'est pas terminée après 2 tirs si, et seulement si, elle ne l'est pas après 3 tirs. D'où :

$$\boxed{p(Z_3) = 2p(1-p)}$$

Et de même :

$$\boxed{p(Z_4) = 4p^2(1-p)^2}$$

Plus généralement, si $n \in \mathbb{N}^*$, Z_{2n} est réalisé si, et seulement si, il y a une succession de succès et échecs, n fois.

Comme les résultats sont indépendants et qu'il y a deux possibilités d'ordonner un succès et un échec :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, p(Z_{2n}) = [2p(1-p)]^n}$$

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Et d'après les remarques précédentes :

$Z_{2n} = Z_{2n+1}$, et donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, p\ (Z_{2n+1}) = \left[2p\ (1-p)\right]^n$$

2) a) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, p\ (W_{2n+2}) = p\ (L_{2n+1}) = 0$$

De plus :
$\forall n \in \mathbb{N}^*, W_{2n+2} = Z_{2n} \cap S_{2n+1} \cap S_{2n+2}$

Et donc (indépendance des événements):
$\forall n \in \mathbb{N}^*, P(W_{2n+2}) = p\ (Z_{2n})\ p^2$

$= p^2 \left[2p(1-p)\right]^n$.

n=0 rejoignant le cas général :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, p\ (W_{2n}) = p^2 \left[\ 2p\ (1-p)\right]^{n-1}$$

Et en procédant de même :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, p\ (L_{2n}) = (1-p)^2 \left[\ 2p\ (1-p)\right]^{n-1}$$

b) On a :
$W = \bigcup_{n=1}^{+\infty} W_n$ et comme W_{2n+1} est impossible :

$= \bigcup_{n=1}^{+\infty} W_{2n}$

d'où :

$p(W) = \sum_{n=1}^{+\infty} p(W_{2n})$

$= p^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \left[2p\left(1-p\right)\right]^{n-1}$ et en reconnaissant une série géométrique :

$= p^2 \left[\dfrac{1}{1-2p\ (1-p)}\right]$

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Soit :

$$\boxed{p(W) = \frac{p^2}{1-2p\ (1-p)}}$$

De même on obtient :

$$\boxed{p(L) = \frac{(1-p)^2}{1-2p\ (1-p)}}$$

On cherche :

$$\begin{aligned} p(\overline{W \cup L}) &= 1\text{-}p\ (W)\text{-}p\ (L) \\ &= 1 - \frac{p^2 + (1-p)^2}{1-2p\ (1-p)} \\ &= 1 - \frac{2p^2 - 2p + 1}{2p^2\ - 2p + 1} \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Donc :

La probabilité que la partie ne s'arrête pas est nulle.

3) a) On a (B_0 étant certain) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, A_n = B_{n-1} \cap S_n$$

D'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, p(A_n) = p(B_{n-1})p(S_n / B_{n-1})$$

Et donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = p.b_{n-1}}$$

De même, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, B_n = \left[A_{n-1} \cap E_n\right] \cup \left[C_{n-1} \cap S_n\right]$$

D'où, les événements étant incompatibles :

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

$\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = p\left[A_{n-1} \cap E_n\right] + p\left[C_{n-1} \cap S_n\right]$

Et donc :

$\forall n \geq 2,\ b_n = a_{n-1}p(E_n / A_{n-1}) + c_{n-1}p(S_n / C_{n-1})$
$= (1-p)\ a_{n-1} + p\ c_{n-1}$

Et n=1 rejoignant le cas général :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = (1-p)a_{n-1} + pc_{n-1}$$

De même:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} c_n = (1-p)\ b_{n-1} + p\ d_{n-1} \\ d_n = (1-p)\ c_{n-1} \end{cases}$$

b) Les séries étant convergentes, on a alors :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = p\sum_{n=1}^{+\infty} b_{n-1}$$
$$= p\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \qquad (n'=n-1)$$

Et comme $a_0=0$:

$$a=p.b$$

De même, on obtient comme $b_0=1$:

$$b=(1-p)a+p.c+1$$
$$c=(1-p)b+p.d$$
$$d=(1-p)c$$

D'où avec $b = \frac{a}{p}$ et $c = \frac{d}{1-p}$, on obtient après résolution :

$$a = \frac{p(1-p+p^2)}{p^4 - 2p^3 + 4p^2 - 3p + 1}$$
$$b = \frac{(1-p)^2}{p^4 - 2p^3 + 4p^2 - 3p + 1}$$

c) On a :

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

$$W = \bigcup_{n=2}^{+\infty} W_n$$

D'où :

$$p(W) = \sum_{n=2}^{+\infty} p(W_n)$$

Or :

$$\forall n \geq 2, p(W_n) = p(A_{n-1} \cap S_n)$$
$$= p\ a_{n-1}$$

Ainsi :
$w = p(W)$
$= pa.$

Et donc :

$$w = \frac{p^2(1-p+p^2)}{p^4 - 2p^3 + 4p^2 - 3p + 1}$$

De même:

$$m = p(M) = \sum_{n=3}^{+\infty} p(L_n)$$
$$= \sum_{n=3}^{+\infty} (1-p)\ d_{n-1}$$
$$= (1-p)\left[d - d_1 - d_0\right]$$
$$= (1-p)\ d \quad \text{car } d_0 = d_1 = 0$$

D'où :

$$m = \frac{(1-p)^3}{p^4 - 2p^3 + 4p^2 - 3p + 1}$$

Enfin, de même qu'au 2.b, on cherche 1-w-m=0, après calculs et donc :

La probabilité que la partie ne s'arrête pas est nulle.

d) $w = m \Leftrightarrow p^2(1-p+p^2) = (1-p)^3$
$\Leftrightarrow p^4 - 2p^2 + 3p - 1 = 0$
$\Leftrightarrow x^4 - 3x^2 + 2x^2 - 1 = 0$ (en posant $p = \frac{1}{x}, x > 1$)

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Après étude de fonction, $x \mapsto x^4 - 3x^2 + 2x^2 - 1$ s'annule exactement une fois sur $]1, +\infty[$, et donc :

Il existe un seul p tel que : w=m

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021