

Loi d'une variable discrète

I. Variables aléatoires

- *Variable aléatoire réelle.* Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace probablisable. On appelle variable aléatoire réelle (ou VAR) définie sur (Ω, \mathcal{A}) , toute application $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout intervalle I de \mathbb{R} , $X^{-1}(I) \in \mathcal{A}$.
- *Variable aléatoire réelle discrète.* On dit que X est une variable aléatoire discrète lorsque $X(\Omega)$ est de cardinal fini ou dénombrable (i.e. en bijection avec \mathbb{N} ou une partie de \mathbb{N}). On note alors : $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ où I est un intervalle de \mathbb{Z} et l'application $i \mapsto x_i$ est strictement croissante.
- Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur (Ω, \mathcal{A}) et $\lambda \in \mathbb{R}$. $X + Y, \lambda X$ et XY sont alors des variables aléatoires définies sur (Ω, \mathcal{A}) .

II. Loi de probabilité et fonction de répartition

- *Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle discrète.* On appelle loi de probabilité (ou distribution) d'une variable aléatoire réelle discrète X l'application

$$p: \begin{cases} X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \\ i \mapsto p(X = i) \end{cases}$$

Pour déterminer la loi d'une variable aléatoire, on peut, si l'on ne peut pas reconnaître en X une variable aléatoire suivant une loi classique, déterminer successivement l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X puis déterminer, pour tout $x_k \in X(\Omega)$, la valeur de $p(X = x_k)$. Pour cela, on peut utiliser des raisonnements probabilistes en décomposant, pour tout $x_k \in X(\Omega)$, l'événement $[X = x_k]$.

- *Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle discrète.* On appelle fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle discrète X l'application

$$F: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto p(X \leq x) \end{cases}$$

- Soit X une variable aléatoire réelle discrète telle que $X(\Omega) = \{x_i, i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$ avec $\forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket, x_{i-1} < x_i$. On a : $\forall i \in \llbracket 2, n \rrbracket, p(X = x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$.

III. Espérance, variance, écart-type1. Définitions

Soit X une variable aléatoire réelle discrète telle que $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$

▪ *Espérance.* X admet une espérance si la série de terme général $x_i p(X = x_i)$ est absolument convergente et on a alors : $E(X) = \sum_{i \in I} x_i p(X = x_i)$

▪ *Variance.* X admet une variance si X admet une espérance et si la série de terme général $(x_i - E(X))^2 p(X = x_i)$ est convergente (ou si $E(X^2)$ existe) et on a alors :

$$V(X) = \sum_{i \in I} (x_i - E(X))^2 p(X = x_i) = E\left[(X - E(X))^2\right], \text{ soit : } V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

▪ *Ecart-type.* Si X admet une variance, on appelle écart-type de X le nombre : $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$

2. Théorèmes

▪ Soient X une variable aléatoire réelle discrète telle que $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$, f une fonction définie sur $X(\Omega)$ et $Y = f(X)$. Si la série de terme général $f(x_i) p(X = x_i)$ est absolument convergente, alors Y admet une espérance et cette espérance vaut : $E(Y) = \sum_{i \in I} f(x_i) p(X = x_i)$ (théorème dit « de transfert »). En particulier, on a : $E(X^2) = m_2(X)$.

Soit X une variable aléatoire réelle discrète. On a :

- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, E(aX + b) = aE(X) + b$ (si X admet une espérance),

- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, V(aX + b) = a^2V(X)$ (si X admet une variance),

- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \sigma_{aX+b} = |a|\sigma_X$ (si X admet une variance).

3. Variable centrée, réduite, centrée réduite

▪ *Variable centrée.* Une variable aléatoire est dite centrée si elle admet une espérance et si cette espérance est nulle. La variable aléatoire Y centrée associée à la variable aléatoire X est : $Y = X - E(X)$.

▪ *Variable réduite.* Une variable aléatoire est dite réduite si elle admet une variance et si cette variance est égale à 1. La variable aléatoire Y réduite associée à la variable aléatoire X (non quasi-certaine) est : $Y = \frac{X - E(X)}{\sigma_X}$.

Loi d'une variable discrète

- Variable centrée réduite. Une variable aléatoire est dite centrée réduite si elle admet une variance, si son espérance est nulle et sa variance est égale à 1. La variable aléatoire Y centrée réduite associée à la variable aléatoire X (non quasi-certaine) est : $Y=X^* = \frac{X - E(X)}{\sigma_X}$.

IV. Lois discrètes usuelles

| Loi | Notation | $X(\Omega)$ | $p(X=k)$ | $E(X)$ | $V(X)$ |
|---|---|--------------------------------------|---|-----------------|-------------------------|
| Loi uniforme Tirage au hasard d'un objet parmi n numérotés de 1 à n. X est le numéro de l'objet tiré. | $X \mapsto \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ | $\llbracket 1, n \rrbracket$ | $\frac{1}{n}$ | $\frac{n+1}{2}$ | $\frac{n^2 - 1}{12}$ |
| Loi de Bernoulli Réalisation d'une expérience n'ayant que deux issues possibles et dont la probabilité de succès est p. Loi indicatrice d'un événement. | $X \mapsto \mathcal{B}(1, p)$ | $\{0, 1\}$ | $p(X=1)=p$ $p(X=0)=1-p$ | p | pq |
| Loi binomiale Réalisation de n essais indépendants d'une expérience à deux issues possibles et dont la probabilité de succès est p. X est le nombre de succès. | $X \mapsto \mathcal{B}(n, p)$ | $\llbracket 0, n \rrbracket$ | $C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ | np | npq |
| Loi hypergéométrique Tirage de n individus parmi N dont une proportion p de type A. X est le nombre d'individus de type A tirés. | $X \mapsto \mathcal{H}(N, n, p)$ | $\subset \llbracket 0, n \rrbracket$ | $\frac{C_{Np}^k C_{N(1-p)}^{n-k}}{C_N^n}$ | np | $\frac{npq}{N-1} (N-n)$ |
| Loi géométrique Réalisation d'essais indépendants d'une expérience à deux issues possibles. X est le temps d'attente du premier succès. | $X \mapsto \mathcal{G}(p)$ | \mathbb{N}^* | $(1-p)^{k-1} p$ | $\frac{1}{p}$ | $\frac{q}{p^2}$ |
| Loi de Poisson Pas de modèle. | $X \mapsto \mathcal{P}(\lambda)$ | \mathbb{N} | $e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ | λ | λ |

N.B. : les résultats grisés (ainsi que la loi de Pascal) ne sont pas au programme.