

Loi d'une variable discrète

Énoncés

Exercice 1

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose d'une urne contenant n boules, dont $n-1$ boules rouges et une boule verte. Un individu effectue une suite de tirages d'une boule au hasard parmi les n jusqu'à ce qu'il tire la boule verte.

- 1) Déterminer la loi, l'espérance et la variance de la variable aléatoire X égale au nombre de tirages effectués si ceux-ci sont effectués sans remise.
- 2) Déterminer la loi et l'espérance de la variable aléatoire Y égale au nombre de tirages effectués si ceux-ci sont effectués avec remise.

Exercice 2

Une urne contient des boules blanches et des boules noires, dont une proportion p ($p \in]0, 1[$) de blanches et une proportion q ($q = 1-p$) de noires. On effectue une suite de tirages avec remise dans cette urne et l'on considère la variable aléatoire X égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention de deux boules de même couleur consécutivement.

- 1) Calculer $p(X=2)$ et $p(X=3)$.
- 2) Déterminer, pour tout entier $n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$, $p(X=n)$ (on distinguera les cas suivant la parité de n).
- 3) Vérifier que :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} p(X = k) = 1$$

Que peut-on en conclure ?

- 4) Montrer que X admet une espérance que l'on déterminera.

Exercice 3

Soit r un entier naturel non nul. On considère une pièce de monnaie avec laquelle la probabilité d'obtenir 'pile' est p ($p \in]0, 1[$) et la probabilité d'obtenir 'face' est $q = 1-p$. On lance successivement cette pièce jusqu'à obtenir 'pile' pour la $r^{\text{ème}}$ fois. Soit alors X le nombre de lancers nécessaires à l'obtention du $r^{\text{ème}}$ 'pile'.

- 1) Déterminer la loi de X , en précisant que pour tout entier k , $p(X=k+r)$.

Loi d'une variable discrète

2) Soit $(s_n(r))_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, s_n(r) = \sum_{k=0}^n C_{k+r}^r q^k$$

On admet que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n(r) = s_r = \frac{1}{(1-q)^{r+1}}$$

Calculer l'espérance et la variance de X .

3) Soit maintenant Y le nombre de fois où l'on a obtenu face avant d'obtenir le $r^{\text{ème}}$ 'pile'. Déterminer la loi de Y , son espérance et sa variance.

CORRECTION

Exercice 1

- 1) Les tirages étant effectués sans remise, il faut au minimum un tirage et au maximum n tirages (toutes les valeurs intermédiaires étant possibles) pour obtenir la boule verte. On a donc : $X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$.

De plus, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'événement $[X=k]$ est réalisé si et seulement si la boule verte est tirée lors du k ème tirage. Considérons alors que le joueur tire toutes les boules de l'urne successivement. Il y a $n!$ suites de tirages possibles. De plus, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il y a également $(n-1)!$ suites de tirages possibles tels que la boule verte soit tirée lors du k ème tirage. Comme les $n!$ suites de tirages possibles sont équiprobables, on en déduit alors :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, p(X = k) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}.$$

On peut maintenant conclure :

$$X \rightsquigarrow \mathcal{U}$$

$$(\llbracket 1, n \rrbracket), \text{ i.e. : } X(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, p(X = k) = \frac{1}{n} \text{ et } E(X) = \frac{n+1}{2}$$

- 2) Les tirages étant effectués avec remise, Y représente le temps d'attente du premier succès lors de la réalisation d'essais indépendants (tenter d'obtenir la boule verte) d'une expérience à deux issues possibles (tirer ou ne pas tirer la boule verte) dont la probabilité d'un succès (obtenir la boule verte) est $\frac{1}{n}$.

On peut alors conclure :

$$Y \rightsquigarrow \mathcal{G}$$

$$\left(\frac{1}{n}\right) \text{ i.e. : } Y(\Omega) = \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}^*, p(Y = k) = \frac{1}{n} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} \text{ et } E(Y) = n$$

Exercice 2

- 1) ■ Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, notons B_i l'événement « obtenir une boule blanche au i ème tirage » et N_i l'événement « obtenir une boule noire au i ème tirage ». Pour que l'événement $[X=2]$ soit réalisé, il faut et il suffit de tirer deux boules de même couleur lors des deux premiers tirages. On a donc :

$$[X = 2] = (B_1 \cap B_2) \cup (N_1 \cap N_2) \quad \text{d'où :}$$

Loi d'une variable discrète

$$p[X = 2] = p\left(\left(B_1 \cap B_2\right) \cup \left(N_1 \cap N_2\right)\right)$$

soit, les événements $(B_1 \cap B_2)$ et $(N_1 \cap N_2)$ étant incompatibles :

$$= p(B_1 \cap B_2) + p(N_1 \cap N_2)$$

et donc, B_1 et B_2 (resp. N_1 et N_2) étant indépendants (les tirages s'effectuant avec remise) :

$$= p(B_1)p(B_2) + p(N_1)p(N_2)$$

et donc comme : $\forall i \in \mathbb{N}^*, p(B_i) = p$ et

$\forall i \in \mathbb{N}^*, p(N_i) = q$:

$$p(X = 2) = p^2 + q^2$$

■ De même, pour que l'événement $[X=3]$ soit réalisé il faut et il suffit que le troisième tirage donne la première suite de deux boules blanches ou de deux boules noires consécutives. On a donc :

$$[X = 3] = (N_1 \cap B_2 \cap B_3) \cup (B_1 \cap N_2 \cap N_3)$$

d'où :

$$p[X = 3] = p\left(\left(N_1 \cap B_2 \cap B_3\right) \cup \left(B_1 \cap N_2 \cap N_3\right)\right)$$

soit, les événements $(N_1 \cap B_2 \cap B_3)$ et $(B_1 \cap N_2 \cap N_3)$

étant incompatibles :

$$= p(N_1 \cap B_2 \cap B_3) + p(B_1 \cap N_2 \cap N_3)$$

et donc, N_1, B_2 et B_3 (resp. B_1, N_2 et N_3) étant mutuellement indépendants:

$$= p(N_1)p(B_2)p(B_3) + p(B_1)p(N_2)p(N_3) \quad \text{d'où :}$$

$$= qp^2 + pq^2$$

et donc, comme $p+q=1$:

$$= pq.$$

$$p(X = 3) = pq$$

2) De même, pour tout $n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket$, pour que l'événement $[X=n]$ soit réalisé, il faut et il suffit que le $n^{\text{ème}}$ tirage donne la première suite de deux boules de même couleur consécutives. On peut donc écrire :

□ Si n est impair ($n=2k+1, k \in \mathbb{N}^*$). Dans ce cas, une boule noire et une boule blanche ont été tirées successivement au cours des $2k-1$ premiers tirages et deux boules de même couleur aux deux derniers tirages. on peut donc écrire :

$$[X = 2k + 1] = \left(\bigcap_{i=1}^k (B_{2i-1} \cap N_{2i}) \cap N_{2k+1} \right) \cup \left(\bigcap_{i=1}^k (N_{2i-1} \cap B_{2i}) \cap B_{2k+1} \right)$$

soit ces deux événements étant incompatibles :

$$p(X = 2k + 1) = p\left(\bigcap_{i=1}^k (B_{2i-1} \cap N_{2i}) \cap N_{2k+1}\right) + p\left(\bigcap_{i=1}^k (N_{2i-1} \cap B_{2i}) \cap B_{2k+1}\right)$$

d'où, les $(B_i)_{1 \leq i \leq 2k+1}$ et les $(N_i)_{1 \leq i \leq 2k+1}$ étant mutuellement indépendants :

Loi d'une variable discrète

$$= p(N_{2k+1}) \prod_{i=1}^k (p(B_{2i-1}) + p(N_{2i})) + p(B_{2k+1}) \prod_{i=1}^k (p(N_{2i-1}) + p(B_{2i}))$$

soit encore :

$$= q \prod_{i=1}^k (pq) + p \prod_{i=1}^k (pq)$$

d'où, comme $p+q=1$:

$$= (pq)^k.$$

□ Si n est pair ($n=2k, k \in \mathbb{N}^*$). Dans ce cas, une boule blanche et une boule noire ont été tirées successivement au cours des $2k-2$ premiers tirages et deux boules de même couleur lors des deux derniers tirages. On peut donc écrire :

$$[X = 2k] = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} (B_{2i-1} \cap N_{2i}) \cap B_{2k-1} \cap B_{2k} \right) \cup \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} (N_{2i-1} \cap B_{2i}) \cap N_{2k-1} \cap N_{2k} \right)$$

soit ces deux évènements étant incompatibles :

$$p(X = 2k) = p \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} (B_{2i-1} \cap N_{2i}) \cap B_{2k-1} \cap B_{2k} \right) + p \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} (N_{2i-1} \cap B_{2i}) \cap N_{2k-1} \cap N_{2k} \right)$$

d'où, les $(B_i)_{1 \leq i \leq 2k}$ et les $(N_i)_{1 \leq i \leq 2k}$ étant mutuellement indépendants :

$$= p(B_{2k-1}) p(B_{2k}) \prod_{i=1}^{k-1} (p(B_{2i-1}) p(N_{2i})) + p(N_{2k-1}) p(N_{2k}) \prod_{i=1}^{k-1} (p(N_{2i-1}) p(B_{2i}))$$

soit encore :

$$= p^2 \prod_{i=1}^{k-1} (p(1-p)) + q^2 \prod_{i=1}^{k-1} (p(1-p)) \quad \text{d'où:}$$

$$= (p^2 + q^2)(pq)^{k-1}.$$

On peut alors conclure, le cas $k=1$ rejoignant le cas général :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} p(X = 2k) = (p^2 + q^2)(pq)^{k-1} \\ p(X = 2k + 1) = (pq)^k \end{cases}$$

3) ■ □ On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=2}^{2n+1} p(X = k) = \sum_{k=1}^n p(X = 2k) + \sum_{k=1}^n p(X = 2k + 1) \quad \text{donc d'après les résultats précédents :}$$

$$= \sum_{k=1}^n (p^2 + q^2)(pq)^{k-1} + \sum_{k=1}^n (pq)^k \quad \text{soit encore :}$$

Loi d'une variable discrète

$$\begin{aligned}
 &= (p^2 + q^2 + pq) \sum_{k=1}^n (pq)^{k-1} \quad \text{et donc, en reconnaissant la somme des } n \\
 &\quad \text{premiers termes d'une suite géométrique} \\
 &\quad \text{de raison } pq \neq 1 : \\
 &= (p^2 + q^2 + pq) \frac{1 - (pq)^n}{1 - pq} \quad \text{donc comme : } p^2 + q^2 - pq = 1 - pq : \\
 &= 1 - (pq)^n .
 \end{aligned}$$

Ainsi, en faisant tendre n vers $+\infty$, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (pq)^n = 0$ (car $pq \in]0,1[$), la suite

$$\left(\sum_{k=2}^{2n+1} p(X = k) \right)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge donc vers } 1.$$

□ De plus, on a :

$$\begin{aligned}
 \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=2}^{2n} p(X = k) &= \sum_{k=2}^{2n+1} p(X = k) - p(X = 2n+1) \quad \text{donc d'après les résultats précédents :} \\
 &= 1 - 2(pq)^n .
 \end{aligned}$$

Ainsi en faisant tendre n vers $+\infty$, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (pq)^n = 0$ (car $pq \in]0,1[$), la suite

$$\left(\sum_{k=2}^{2n} p(X = k) \right)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge donc vers } 1.$$

Les suites $\left(\sum_{k=2}^{2n} p(X = k) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $\left(\sum_{k=2}^{2n+1} p(X = k) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergeant toutes deux vers 1, on peut finalement écrire que la suite $\left(\sum_{k=2}^n p(X = k) \right)_{n \geq 2}$ converge vers 1.

On peut donc conclure :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} p(X = k) = 1$$

■ Comme $\sum_{k=2}^{+\infty} p(X = k) = p\left(\bigcup_{k=2}^{+\infty} (X = k)\right) = 1$, on peut alors conclure :

X est bien une variable aléatoire et l'événement « *obtenir consécutivement deux boules de même couleur* » est un événement quasi-certain.

Loi d'une variable discrète

4) □ D'après les résultats précédents, on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=2}^{2n+1} kp(X=k) = \sum_{k=1}^n 2kp(X=2k) + \sum_{k=1}^n (2k+1)p(X=2k+1) \quad \text{donc d'après les résultats}$$

précédents :

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^n 2k(p^2 + q^2)(pq)^{k-1} + \sum_{k=1}^n 2k(pq)^k + \sum_{k=1}^n (pq)^k \quad \text{i.e. :} \\ &= 2(p^2 + q^2 + pq) \sum_{k=1}^n k(pq)^{k-1} + pq \sum_{k=1}^n (pq)^{k-1} \end{aligned}$$

Les séries de termes généraux respectifs $k(pq)^{k-1}$ et $(pq)^{k-1}$ étant convergentes (car $|pq| < 1$), de sommes respectives $\frac{1}{(1-pq)^2}$ et $\frac{1}{1-pq}$, on peut alors écrire, en faisant tendre n

vers $+\infty$ dans l'égalité précédente, que la suite $\left(\sum_{k=2}^{2n+1} kp(X=k) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers

$$2 \frac{p^2 + q^2 + pq}{(1-pq)^2} + \frac{pq}{1-pq}.$$

Or on a :

$$2 \frac{p^2 + q^2 + pq}{(1-pq)^2} + \frac{pq}{1-pq} = \frac{2p^2 + 2q^2 + 2pq + pq - p^2q^2}{(1-pq)^2} \quad \text{soit encore :}$$

$$= \frac{2(p+q)^2 - pq - p^2q^2}{(1-pq)^2} \quad \text{et donc, comme } p+q=1$$

$$= \frac{2 - pq - p^2q^2}{(1-pq)^2}.$$

Ainsi, la suite $\left(\sum_{k=2}^{2n+1} kp(X=k) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{2 - pq - p^2q^2}{(1-pq)^2}$.

□ De plus, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=2}^{2n} kp(X=k) = \sum_{k=2}^{2n+1} kp(X=k) - (2n+1)p(X=2n+1) \quad \text{soit d'après les résultats}$$

précédents :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=2}^{2n} kp(X=k) = \sum_{k=2}^{2n+1} kp(X=k) - (2n+1)(pq^n)$$

Or, comme $pq \in]0, 1[$, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (pq)^n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(pq)^n = 0$. En faisant tendre n vers $+\infty$

dans l'égalité précédente, on peut alors écrire que la suite $\left(\sum_{k=2}^{2n} kp(X=k) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers

$$\frac{2 - pq - p^2q^2}{(1-pq)^2}.$$

Loi d'une variable discrète

Les suites $\left(\sum_{k=2}^{2n} kp(X=k) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $\left(\sum_{k=2}^{2n+1} kp(X=k) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergeant toutes deux vers $\frac{2-pq-p^2q^2}{(1-pq)^2}$, on peut finalement écrire que la suite $\left(\sum_{k=2}^n kp(X=k) \right)_{n \geq 2}$ converge vers $\frac{2-pq-p^2q^2}{(1-pq)^2}$. On peut alors conclure :

X admet une espérance, et celle-ci vaut :

$$E(X) = \frac{2-pq-p^2q^2}{(1-pq)^2}$$

Exercice 3

1) X étant le nombre de lancers nécessaires à l'obtention du r^{ème} pile, on a clairement : $X(\Omega) = \llbracket r, +\infty \llbracket$. De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'événement $[X=k+r]$ est réalisé si et seulement si le r^{ème} pile est obtenu au $(k+r)$ ^{ème} lancer.

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour déterminer une série de lancers de la pièce telle que le r^{ème} 'pile' soit obtenu au $(k+r)$ ^{ème} lancer, il faut et il suffit de :

- choisir les r-1 lancers, parmi les k+r-1 premiers lancers, au cours desquels on obtient les r-1 premiers 'pile' (C_{k+r-1}^{r-1} possibilités),
- obtenir 'pile' à ces r-1 lancers et 'face' à chacun des k lancers restants parmi les k+r-1 premiers lancers, (événement de probabilité $p^{r-1}q^k$, les lancers étant indépendants),
- obtenir 'pile' au $(k+r)$ ^{ème} lancer (événement de probabilité p).

On en déduit alors : $\forall k \in \mathbb{N}, p(X = k+r) = C_{k+r-1}^{r-1} p^{r-1} q^k \cdot p$, d'où la conclusion :

$$X(\Omega) = \llbracket r, +\infty \llbracket \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},$$

$$p(X = k+r) = C_{k+r-1}^{r-1} p^r q^k$$

2) On a : $\forall k \in \mathbb{N}, (k+r)C_{k+r-1}^{r-1} = rC_{k+r}^r$. Comme la suite $(s_n(r))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite s_r , on peut écrire que la série de terme général $C_{k+r}^r q^k$ converge de somme s_r . On en déduit alors que X admet une espérance et que cette espérance vaut :

$$E(X) = \sum_{k=r}^{+\infty} kp(X=k) \quad \text{soit en effectuant le changement de variable } k'=k-r :$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} (k+r)p(X=k+r) \quad \text{soit encore, d'après les résultats précédents :}$$

Loi d'une variable discrète

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} (k+r) C_{k+r-1}^{r-1} p^r q^k && \text{et comme } \forall k \in \mathbb{N}, (k+r) C_{k+r-1}^{r-1} = r C_{k+r}^r : \\
 &= r p^r \sum_{k=0}^{+\infty} C_{k+r}^r q^k && \text{et en reconnaissant la somme } s_r \text{ de la série de terme} \\
 & && \text{général } C_{k+r}^r q^k : \\
 &= p^r s_r && \text{soit enfin, comme } s_r = \frac{1}{(1-q)^{r+1}} = \frac{1}{p^{r+1}} :
 \end{aligned}$$

$$E(X) = \frac{r}{p}$$

■ On a : $\forall k \in \mathbb{N}, (k+r)(k+r+1) C_{k+r-1}^{r-1} = r(r+1) C_{k+r+1}^{r+1}$. Comme la suite $(s_n(r+1))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite s_{r+1} , la série de terme général $C_{k+r+1}^{r+1} q^k$ converge de somme s_{r+1} . On en déduit alors que $X(X+1)$ admet une espérance et que cette espérance vaut :

$$\begin{aligned}
 E(X(X+1)) &= \sum_{k=r}^{+\infty} k(k+1) p(X=k) && \text{soit en effectuant le changement de variable } k'=k-r : \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} (k+r)(k+r+1) C_{k+r-1}^{r-1} p^r q^k && \\
 & && \text{et comme } \forall k \in \mathbb{N}, (k+r)(k+r+1) C_{k+r-1}^{r-1} = r(r+1) C_{k+r+1}^{r+1} : \\
 &= r(r+1) p^r \sum_{k=0}^{+\infty} C_{k+r+1}^{r+1} q^k && \text{et en reconnaissant la somme } s_{r+1} \text{ de la série de terme} \\
 & && \text{général } C_{k+r+1}^{r+1} q^k : \\
 &= r(r+1) p^r s_{r+1} && \text{soit enfin, comme } s_{r+1} = \frac{1}{(1-q)^{r+2}} = \frac{1}{p^{r+2}} : \\
 &= \frac{r(r+1)}{p^2}.
 \end{aligned}$$

On peut maintenant écrire que X admet une variance et que cette variance vaut :

$$\begin{aligned}
 V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 && \text{soit :} \\
 &= E(X(X+1)) - E(X) - E(X)^2 && \text{et donc, d'après les résultats précédents :} \\
 &= \frac{r(r+1)}{p^2} - \frac{r}{p} - \frac{r^2}{p^2} && \text{i.e. :} \\
 &= \frac{r-rp}{p^2} && \text{et donc :}
 \end{aligned}$$

$$V(X) = \frac{rq}{p^2}$$

3) Comme X est le nombre de lancers nécessaires à l'obtention du $r^{\text{ème}}$ 'pile' et Y le nombre de fois où l'on a obtenu 'face' avant d'avoir pour la $r^{\text{ème}}$ fois 'pile', on a : $Y+r=X$, i.e. : $Y=X-r$. On en déduit alors :

$$Y(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, p(Y=k) = C_{k+r-1}^{r-1} p^r q^k$$

■ Comme $Y=X-r$, on peut également écrire :

- $E(Y) = E(X) - r = \frac{r}{p} - r = \frac{rq}{p}$ (par linéarité de l'espérance), et :

- $V(Y) = V(X - r) = V(X) = \frac{rq}{p^2}$ d'où la conclusion :

$$E(Y) = \frac{rq}{p} \text{ et } V(Y) = \frac{rq}{p^2}$$