# Loi d'une variable discrète

## Enoncés

Exercice 1

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose d'une urne contenant n boules, dont n-1 boules rouges et une boule verte. Un individu effectue une suite de tirages d'une boule au hasard parmi les n jusqu'à ce qu'il tire la boule verte.

**1)** Déterminer la loi, l'espérance et la variance de la variable aléatoire X égale au nombre de tirages effectués si ceux-ci sont effectués sans remise.

**2)** Déterminer la loi et l'espérance de la variable aléatoire Y égale au nombre de tirages effectués si ceux-ci sont effectués avec remise.

Exercice 2

Une urne contient des boules blanches et des boules noires, dont une proportion p ($p \in ]0, 1[$) de blanches et une proportion q ($q=1-p$) de noires. On effectue une suite de tirages avec remise dans cette urne et l'on considère la variable aléatoire X égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention de deux boules de même couleur consécutivement.

**1)** Calculer $p(X=2)$ et $p(X=3)$.

**2)** Déterminer, pour tout entier $n \in [\![2, +\infty[\![$, $p(X=n)$ (on distinguera les cas suivant la parité de n).

**3)** Vérifier que :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} p(X = k) = 1$$

Que peut-on en conclure ?

**4)** Montrer que X admet une espérance que l'on déterminera.

Exercice 3

Soit r un entier naturel non nul. On considère une pièce de monnaie avec laquelle la probabilité d'obtenir 'pile' est $p(p \in ]0, 1[)$ et la probabilité d'obtenir 'face' est $q=1-p$. On lance successivement cette pièce jusqu'à obtenir 'pile' pour la $r^{ème}$ fois. Soit alors X le nombre de lancers nécessaires à l'obtention du $r^{ème}$ 'pile'.

**1)** Déterminer la loi de X, en précisant que pour tout entier k, $p(X=k+r)$.

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

**2)** Soit $(s_n(r))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}, s_n(r)=\sum_{k=0}^{n} C_{k+r}^{r} q^k$$

On admet que :

$$\lim_{n\to+\infty} s_n(r) = s_r = \frac{1}{(1-q)^{r+1}}$$

Calculer l'espérance et la variance de X.

**3)** Soit maintenant Y le nombre de fois où l'on a obtenu face avant d'obtenir le $r^{ème}$ 'pile'. Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

# CORRECTION

Exercice 1

**1)** Les tirages étant effectués sans remise, il faut au minimum un tirage et au maximum n tirages (toutes les valeurs intermédiaires étant possibles) pour obtenir la boule verte. On a donc : $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$.

De plus, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'événement [X=k] est réalisé si et seulement si la boule verte est tirée lors du kème tirage. Considérons alors que le joueur tire toutes les boules de l'urne successivement. Il y a n! suites de tirages possibles. De plus, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, il y a également (n-1) ! suites de tirages possibles tels que la boule verte soit tirée lors du kème tirage. Comme les n ! suites de tirages possibles sont équiprobables, on en déduit alors : $\forall k \in [\![1, n]\!], p(X = k) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$.

On peut maintenant conclure :

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}\left([\![1, n]\!]\right), \text{ i.e. : } X(\Omega) = [\![1, n]\!], \forall k \in [\![1, n]\!], p(X = k) = \frac{1}{n} \text{ et } E(X) = \frac{n+1}{2}$$

**2)** Les tirages étant effectués avec remise, Y représente le temps d'attente du premier succès lors de la réalisation d'essais indépendants (tenter d'obtenir la boule verte) d'une expérience à deux issues possibles (tirer ou ne pas tirer la boule verte) dont la probabilité d'un succès (obtenir la boule verte) est $\frac{1}{n}$.

On peut alors conclure :

$$Y \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{n}\right) \text{ i.e. : } Y(\Omega) = \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}^*, p(Y = k) = \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} \text{ et } E(Y) = n$$

Exercice 2

**1)** ■ Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, notons $B_i$ l'événement « obtenir une boule blanche au $i^{ème}$ tirage » et $N_i$ l'événement « obtenir une boule noire au $i^{ème}$ tirage ». Pour que l'événement [X=2] soit réalisé, il faut et il suffit de tirer deux boules de même couleur lors des deux premiers tirages. On a donc :

$[X = 2] = (B_1 \cap B_2) \cup (N_1 \cap N_2)$ d'où :

 Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

$p[X=2]=p\left(\left(B_1\cap B_2\right)\cup\left(N_1\cap N_2\right)\right)$ soit, les évènements $(B_1\cap B_2)$ et $(N_1\cap N_2)$ étant incompatibles :

$=p(B_1\cap B_2)+p(N_1\cap N_2)$ et donc, $B_1$ et $B_2$ (resp. $N_1$ et $N_2$) étant indépendants (les tirages s'effectuant avec remise) :

$=p(B_1)p(B_2)+p(N_1)p(N_2)$ et donc comme : $\forall i\in\mathbb{N}^*, p(B_i)=p$ et $\forall i\in\mathbb{N}^*, p(N_i)=q$ :

$$\boxed{p(X=2)=p^2+q^2}$$

■ De même, pour que l'événement [X=3] soit réalisé il faut et il suffit que le troisième tirage donne la première suite de deux boules blanches ou de deux boules noires consécutives. On a donc :

$[X=3]=(N_1\cap B_2\cap B_3)\cup(B_1\cap N_2\cap N_3)$ d'où :

$p[X=3]=p\left((N_1\cap B_2\cap B_3)\cup(B_1\cap N_2\cap N_3)\right)$ soit, les évènements $(N_1\cap B_2\cap B_3)$ et $(B_1\cap N_2\cap N_3)$ étant incompatibles :

$=p(N_1\cap B_2\cap B_3)+p(B_1\cap N_2\cap N_3)$ et donc, $N_1$, $B_2$ et $B_3$ (resp. $B_1$, $N_2$ et $N_3$) étant mutuellement indépendants:

$=p(N_1)p(B_2)p(B_3)+p(B_1)p(N_2)p(N_3)$ d'où :

$=qp^2+pq^2$ et donc, comme p+q=1 :

$=pq.$

$$\boxed{p(X=3)=pq}$$

**2)** De même, pour tout $n\in[\![2,+\infty[\![$, pour que l'événement [X=n] soit réalisé, il faut et il suffit que le $n^{ème}$ tirage donne la première suite de deux boules de même couleur consécutives. On peut donc écrire :

❒ Si n est impair (n=2k+1, $k\in\mathbb{N}^*$). Dans ce cas, une boule noire et une boule blanche ont été tirées successivement au cours des 2k-1 premiers tirages et deux boules de même couleur aux deux derniers tirages. on peut donc écrire :

$$[X=2k+1]=\left(\bigcap_{i=1}^{k}(B_{2i-1}\cap N_{2i})\cap N_{2k+1}\right)\cup\left(\bigcap_{i=1}^{k}(N_{2i-1}\cap B_{2i})\cap B_{2k+1}\right)$$

soit ces deux événements étant incompatibles :

$$[p(X=2k+1)]=p\left(\bigcap_{i=1}^{k}(B_{2i-1}\cap N_{2i})\cap N_{2k+1}\right)+p\left(\bigcap_{i=1}^{k}(N_{2i-1}\cap B_{2i})\cap B_{2k+1}\right)$$

d'où, les $(B_i)_{1\leqslant i\leqslant 2k+1}$ et les $(N_i)_{1\leqslant i\leqslant 2k+1}$ étant mutuellement indépendants :


© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

$$= p(N_{2k+1})\prod_{i=1}^{k}\left(p(B_{2i-1}) \quad p \quad (N_{2i})\right) + p \quad (B_{2k+1})\prod_{i=1}^{k}\left( \quad p \quad (N_{2i-1}) \quad p \quad (B_{2i})\right)$$

soit encore :

$= q\prod_{i=1}^{k}(pq) + p\prod_{i=1}^{k}(pq)$ d'où, comme p+q=1 :

$= (pq)^k$.

❒ Si n est pair (n=2k, $k\in[\![2,+\infty[\![$). Dans ce cas, une boule blanche et une boule noire ont été tirées successivement au cours des 2k-2 premiers tirages et deux boules de même couleur lors des deux derniers tirages. On peut donc écrire :

$$[X = 2k] = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1}(B_{2i-1} \cap N_{2i}) \cap B_{2k-1} \cap B_{2k}\right) \cup \left(\bigcap_{i=1}^{k-1}(N_{2i-1} \cap B_{2i}) \cap N_{2K-1} \cap N_{2k}\right)$$

soit ces deux évènements étant incompatibles :

$$p(X = 2k) = p\left(\bigcap_{i=1}^{k-1}(B_{2i-1} \cap N_{2i}) \cap B_{2k-1} \cap B_{2k}\right) + p\left(\bigcap_{i=1}^{k-1}(N_{2i-1} \cap B_{2i}) \cap N_{2k-1} \cap N_{2k}\right)$$

d'où, les $(B_i)_{1\leqslant i\leqslant 2k}$ et les $(N_i)_{1\leqslant i\leqslant 2k}$ étant mutuellement indépendants :

$$= p(B_{2k-1})p(B_{2k})\prod_{i=1}^{k-1}(p(B_{2i-1})p(N_{2i})) + p(N_{2k-1})p(N_{2k})\prod_{i=1}^{k-1}(p(N_{2i-1})p(B_{2i}))$$

soit encore :

$= p^2\prod_{i=1}^{k-1}(p(1-p)) + q^2\prod_{i=1}^{k-1}(p(1-p))$ d'où:

$= (p^2+q^2)(pq)^{k-1}$.

On peut alors conclure, le cas k=1 rejoignant le cas général :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \begin{cases} p(X = 2k) = (p^2 + q^2)(pq)^{k-1} \\ p(X = 2k+1) = (pq)^k \end{cases}.$$

3) ■ ❒ On a :

$\forall n\in\mathbb{N}^*, \sum_{k=2}^{2n+1} p(X = k) = \sum_{k=1}^{n} p(X = 2k) + \sum_{k=1}^{n} p(X = 2k+1)$ donc d'après les résultats précédents :

$= \sum_{k=1}^{n}(p^2 + q^2)(pq)^{k-1} + \sum_{k=1}^{n}(pq)^k$ soit encore :


Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE
© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

$= (p^2 + q^2 + pq)\sum_{k=1}^{n}(pq)^{k-1}$ et donc, en reconnaissant la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $pq \neq 1$ :

$= (p^2 + q^2 + pq)\dfrac{1-(pq)^n}{1-pq}$ donc comme : $p^2+q^2-pq=1-pq$ :

$= 1-(pq)^n$.

Ainsi, en faisant tendre n vers $+\infty$, comme $\lim_{n\to+\infty}(pq)^n = 0$ (car $pq \in ]0,1[$), la suite $\left(\sum_{k=2}^{2n+1} p(X=k)\right)_{n\in N^*}$ converge donc vers 1.

❒ De plus, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=2}^{2n} p(X=k) = \sum_{k=2}^{2n+1} p(X=k) - p(X=2n+1)$ donc d'après les résultats précédents :

$= 1-2(pq)^n$.

Ainsi en faisant tendre n vers $+\infty$, comme $\lim_{n\to+\infty}(pq)^n = 0$ (car $pq \in ]0,1[$), la suite $\left(\sum_{k=2}^{2n} p(X=k)\right)_{n\in N^*}$ converge donc vers 1.

Les suites $\left(\sum_{k=2}^{2n} p(X=k)\right)_{n\in N^*}$ et $\left(\sum_{k=2}^{2n+1} p(X=k)\right)_{n\in N^*}$ convergeant toutes deux vers 1, on peut finalement écrire que la suite $\left(\sum_{k=2}^{n} p(X=k)\right)_{n\geq 2}$ converge vers 1.

On peut donc conclure :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} p(X=k) = 1$$

■ Comme $\sum_{k=2}^{+\infty} p(X=k) = p\left(\bigcup_{k=2}^{+\infty}(X=k)\right) = 1$, on peut alors conclure :

X est bien une variable aléatoire et l'événement « *obtenir consécutivement deux boules de même couleur* » est un événement quasi-certain.


Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

4) ☐ D'après les résultats précédents, on peut écrire :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=2}^{2n+1} kp(X=k) = \sum_{k=1}^{n} 2kp(X=2k) + \sum_{k=1}^{n} (2k+1)p(X=2k+1)$ donc d'après les résultats précédents :

$$= \sum_{k=1}^{n} 2k(p^2+q^2)(pq)^{k-1} + \sum_{k=1}^{n} 2k(pq)^k + \sum_{k=1}^{n} (pq)^k \quad \text{i.e. :}$$

$$= 2(p^2+q^2+pq)\sum_{k=1}^{n} k(pq)^{k-1} + pq\sum_{k=1}^{n} (pq)^{k-1}$$

Les séries de termes généraux respectifs $k(pq)^{k-1}$ et $(pq)^{k-1}$ étant convergentes (car $|pq|<1$), de sommes respectives $\frac{1}{(1-pq)^2}$ et $\frac{1}{1-pq}$, on peut alors écrire, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité précédente, que la suite $\left(\sum_{k=2}^{2n+1} kp(X=k)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $2\frac{p^2+q^2+pq}{(1-pq)^2} + \frac{pq}{1-pq}$.

Or on a :

$$2\frac{p^2+q^2+pq}{(1-pq)^2} + \frac{pq}{1-pq} = \frac{2p^2+2q^2+2pq+pq-p^2q^2}{(1-pq)^2} \quad \text{soit encore :}$$

$$= \frac{2(p+q)^2-pq-p^2q^2}{(1-pq)^2} \quad \text{et donc, comme } p+q=1$$

$$= \frac{2-pq-p^2q^2}{(1-pq)^2}.$$

Ainsi, la suite $\left(\sum_{k=2}^{2n+1} kp(X=k)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{2-pq-p^2q^2}{(1-pq)^2}$.

❒ De plus, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=2}^{2n} kp(X=k) = \sum_{k=2}^{2n+1} kp(X=k) - (2n+1)p(X=2n+1)$ soit d'après les résultats précédents :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=2}^{2n} kp(X=k) = \sum_{k=2}^{2n+1} kp(X=k) - (2n+1)(pq^n)$

Or, comme $pq\in]0,1[$, on a : $\lim_{n\to+\infty} (pq)^n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} n(pq)^n = 0$. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'égalité précédente, on peut alors écrire que la suite $\left(\sum_{k=2}^{2n} kp(X=k)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{2-pq-p^2q^2}{(1-pq)^2}$.


© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Les suites $\left(\sum_{k=2}^{2n} kp(X=k)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\sum_{k=2}^{2n+1} kp(X=k)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergeant toutes deux vers $\frac{2-pq-p^2q^2}{(1-pq)^2}$, on peut finalement écrire que la suite $\left(\sum_{k=2}^{n} kp(X=k)\right)_{n\geq 2}$ converge vers $\frac{2-pq-p^2q^2}{(1-pq)^2}$. On peut alors conclure :

X admet une espérance, et celle-ci vaut :
$$E(X)=\frac{2-pq-p^2q^2}{(1-pq)^2}$$

Exercice 3

1) X étant le nombre de lancers nécessaires à l'obtention du $r^{ème}$ pile, on a clairement : $X(\Omega) = [\![r,+\infty[\![$. De plus, pour tout $k\in\mathbb{N}$, l'événement [X=k+r] est réalisé si et seulement si le $r^{ème}$ pile est obtenu au $(k+r)^{ème}$ lancer.

Or, pour tout $k\in\mathbb{N}$, pour déterminer une série de lancers de la pièce telle que le $r^{ème}$ 'pile' soit obtenu au $(k+r)^{ème}$ lancer , il faut et il suffit de :

- choisir les r-1 lancers, parmi les k+r-1 premiers lancers, au cours desquels on obtient les r-1 premiers 'pile' ($C_{k+r-1}^{r-1}$ possibilités),
- obtenir 'pile' à ces r-1 lancers et 'face' à chacun des k lancers restants parmi les k+r-1 premiers lancers, (événement de probabilité $p^{r-1}q^k$, les lancers étant indépendants),
- obtenir 'pile' au $(k+r)^{ème}$ lancer (événement de probabilité p).

On en déduit alors : $\forall k\in\mathbb{N}, p(X=k+r)=C_{k+r-1}^{r-1}p^{r-1}q^k.p$ , d'où la conclusion :

$$X(\Omega)=[\![r,+\infty[\![ \ et \ \forall k\in\mathbb{N},$$
$$p(X=k+r)=C_{k+r-1}^{r-1}p^rq^k$$

2) On a : $\forall k\in\mathbb{N},(k+r)C_{k+r-1}^{r-1}=rC_{k+r}^{r}$. Comme la suite $(s_n(r))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite $s_r$, on peut écrire que la série de terme général $C_{k+r}^{r}q^k$ converge de somme $s_r$. On en déduit alors que X admet une espérance et que cette espérance vaut :

$E(X)=\sum_{k=r}^{+\infty} kp\ (X=k)$ soit en effectuant le changement de variable k'=k-r :

$=\sum_{k=0}^{+\infty}(k+r)p(X=k+r)$ soit encore, d'après les résultats précédents :


Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE
© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

$= \sum_{k=0}^{+\infty} (k+r) C_{k+r-1}^{r-1} p^r q^k$ et comme $\forall k \in \mathbb{N}, (k+r) C_{k+r-1}^{r-1} = r C_{k+r}^{r}$ :

$= r p^r \sum_{k=0}^{+\infty} C_{k+r}^{r} q^k$ et en reconnaissant la somme $s_r$ de la série de terme général $C_{k+r}^{r} q^k$ :

$= p^r s_r$ soit enfin, comme $s_r = \frac{1}{(1-q)^{r+1}} = \frac{1}{p^{r+1}}$ :

$$E(X) = \frac{r}{p}$$

■ On a : $\forall k \in \mathbb{N}, (k+r)(k+r+1) C_{k+r-1}^{r-1} = r(r+1) C_{k+r+1}^{r+1}$. Comme la suite $(s_n(r+1))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente de limite $s_{r+1}$, la série de terme général $C_{k+r+1}^{r+1} q^k$ converge de somme $s_{r+1}$. On en déduit alors que X(X+1) admet une espérance et que cette espérance vaut :

$E(X(X+1)) = \sum_{k=r}^{+\infty} k(k+1) p(X=k)$ soit en effectuant le changement de variable k'=k-r :

$= \sum_{k=0}^{+\infty} (k+r)(k+r+1) C_{k+r-1}^{r-1} p^r q^k$

et comme $\forall k \in \mathbb{N}, (k+r)(k+r+1) C_{k+r-1}^{r-1} = r(r+1) C_{k+r+1}^{r+1}$ :

$= r(r+1) p^r \sum_{k=0}^{+\infty} C_{k+r+1}^{r+1} q^k$ et en reconnaissant la somme $s_{r+1}$ de la série de terme général $C_{k+r+1}^{r+1} q^k$ :

$= r(r+1) p^r s_{r+1}$ soit enfin, comme $s_{r+1} = \frac{1}{(1-q)^{r+2}} = \frac{1}{p^{r+2}}$ :

$= \frac{r(r+1)}{p^2}$.

On peut maintenant écrire que X admet une variance et que cette variance vaut :

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ soit :

$= E(X(X+1)) - E(X) - E(X)^2$ et donc, d'après les résultats précédents :

$= \frac{r(r+1)}{p^2} - \frac{r}{p} - \frac{r^2}{p^2}$ i.e. :

$= \frac{r - rp}{p^2}$ et donc :

$$V(X) = \frac{rq}{p^2}$$


Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE
© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

3) Comme X est le nombre de lancers nécessaires à l'obtention du $r^{ème}$ 'pile' et Y le nombre de fois où l'on a obtenu 'face' avant d'avoir pour la $r^{ème}$ fois 'pile', on a : Y+r=X, i.e. : Y=X-r. On en déduit alors :

$$Y(\Omega)=\mathbb{N} \text{ et } \forall k\in\mathbb{N},\ p(Y=k)=C_{k+r-1}^{r-1}p^r q^k$$

- Comme Y=X-r, on peut également écrire :
  - $E(Y)=E(X)-r=\frac{r}{p}-r=\frac{rq}{p}$ (par linéarité de l'espérance), et :
  - $V(Y)=V(X-r)=V(X)=\frac{rq}{p^2}$ d'où la conclusion :

$$E(Y)=\frac{rq}{p} \text{ et } V(Y)=\frac{rq}{p^2}$$


© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021