Tirages dans une urne

Enoncé

Dans tout l'exercice, on désigne par c un entier naturel non nul fixé. On considère alors une urne contenant initialement des boules blanches et des boules rouges, toutes indiscernables au toucher, dans laquelle on effectue des tirages successifs d'une boule selon le protocole suivant : après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne, dans laquelle on rajoute, avant le tirage suivant, c boules de la couleur de la boule qui vient d'être tirée.

1) Dans cette question, on suppose que l'urne contient initialement b boules blanches et r boules rouges, où b et r sont des entiers naturels non nuls.

a) Déterminer la probabilité d'obtenir une boule blanche au premier tirage.

b) Déterminer la probabilité d'obtenir une boule blanche au deuxième tirage.

c) Si la deuxième boule tirée est blanche, quelle est la probabilité que la première boule tirée ait été blanche ?

2) Pour tous entiers naturels non nuls n, x et y, on note $u_n(x,y)$ la probabilité d'obtenir une boule blanche au $n^{\text{ème}}$ tirage, lorsque l'urne contient initialement x boules blanches et y boules rouges.

a) Montrer que :

$$\forall (n,x,y) \in (\mathbb{N}^*)^3,\ u_{n+1}(x,y) = u_n(x+c,y)\frac{x}{x+y} + u_n(x,y+c)\frac{y}{x+y}.$$

b) En déduire que :

$$\forall (n,x,y) \in (\mathbb{N}^*)^3,\ u_n(x,y) = \frac{x}{x+y}.$$

3) Dans cette question, on suppose que l'urne contient initialement exactement une boule blanche et une boule rouge et que c est égal à 1. Pour tout entier naturel n non nul, on note alors X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des
n premiers tirages.

Déterminer la loi de X_1 et de X_2.

Montrer alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit une loi uniforme dont on précisera l'espérance et la variance.

Correction

1) ***a)*** *Avant de procéder au premier tirage, l'urne contient b+r boules, dont b boules blanches. Il y a donc b+r tirages possibles, dont b favorables à la réalisation de l'événement « obtenir une boule blanche au premier tirage ». Les tirages étant équiprobables (les boules étant indiscernables au toucher), on peut donc conclure :*

La probabilité d'obtenir une boule blanche au premier tirage est $\frac{b}{b+r}$

b) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, notons B_k l'événement « obtenir une boule blanche au $k^{\text{ème}}$ tirage », et R_k l'événement « obtenir une boule rouge au $k^{\text{ème}}$ tirage ». La famille (B_1, R_1) formant un système complet d'évènements, on peut écrire, d'après la formule des probabilités totales :

$p(B_2) = p(B_1)p(B_2/B_1) + p(R_1)p(B_2/R_1)$ donc, d'après le résultat de la question précédente,

comme $p(R_1) = 1 - p(B_1)$:

$$= \frac{b}{b+r}p(B_2\ /B_1) + \frac{r}{b+r}p(B_2\ /R_1).$$

De plus, sachant que l'événement B_1 est réalisé, l'urne contient, avant de procéder au deuxième tirage, b+r+c boules, dont b+c blanches. Les tirages étant équiprobables, on a donc : $p(B_2\ /B_1) = \frac{b+c}{b+c+r}$.

On a donc :

$$p(B_2) = \frac{b(b+c)}{(b+r)(b+r+c)} + \frac{rb}{(b+r)(b+r+c)}$$ soit finalement :

La probabilité d'obtenir une boule blanche au deuxième tirage est $\frac{b}{b+r}$

c) Les évènements B_1 et B_2 étant de probabilités non nulles, on a, d'après la formule de Bayes :

$$p(B_1 / B_2) = \frac{p(B_1)p(B_2 / B_1)}{p(B_2)}$$ d'où, d'après les résultats précédents :

$$\boxed{\text{Si la deuxième boule tirée est blanche, la probabilité que la première boule tirée ait été blanche est } \frac{b+c}{b+r+c}}$$

2) ***a)*** *Soit* $(x, y) \in (\mathbb{N}^*)^2$*. La famille* (B_1, R_1) *formant un système complet d'évènements, on peut écrire, d'après la formule des probabilités totales :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p(B_{n+1}) = p(B_1)p(B_{n+1} / B_1) + p(R_1)p(B_{n+1} / R_1)$$

donc, en substituant x à b et y à r dans le résultat de la question 1a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1}(x, y) = p(B_{n+1} / B_1)\frac{x}{x+y} + p(B_{n+1} / R_1)\frac{y}{x+y}.$$

Soit alors $n \in \mathbb{N}^*$. Sachant que l'évènement B_1 est réalisé, l'urne contient alors x+c boules blanches et y boules rouges avant de procéder au deuxième tirage. Pour que l'événement B_{n+1} soit réalisé, il faut et il suffit donc que l'on obtienne une boule blanche dans l'urne à l'issue d'une suite de n tirages dont le premier est effectué dans une urne contenant x+c boules blanches et y boules rouges. On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, p\left(B_{n+1}/B_1\right) = u_n(x+c, y).$$

De même, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, p\left(B_{n+1}/R_1\right) = u_n(x, y+c)$. On peut finalement conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x, y) \in (\mathbb{N}^*)^2, u_{n+1}(x, y) = u_n(x+c, y)\frac{x}{x+y} + u_n(x, y+c)\frac{y}{x+y}}$$

b) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x, y) \in (\mathbb{N}^*)^2, u_n(x, y) = \frac{x}{x+y}$

- Au rang n=1. D'après le résultat de la question 1a, la propriété est vérifiée au rang n=1.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que : $\forall (x,y) \in (\mathbb{N}^*)^2, u_n(x,y) = \dfrac{x}{x+y}$. D'après le résultat de la question 2a, on a :

$$\begin{aligned} \forall (x,y) \in (\mathbb{N}^*)^2, u_{n+1}(x,y) &= u_n(x+c,y)\frac{x}{x+y} + u_n(x,y+c)\frac{y}{x+y} \\ &= \frac{x(x+c)}{(x+y)(x+y+c)} + \frac{xy}{(x+y)(x+y+c)} \\ &= \frac{x}{x+y}. \end{aligned}$$

donc par hypothèse de récurrence :

d'où :

Ainsi, la propriété est vérifiée au rang n+1.

- On peut finalement conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x,y) \in (\mathbb{N}^*)^2, u_n(x,y) = \frac{x}{x+y}}$$

1.1 ***a)*** *A l'issue du premier tirage, on a pu obtenir une boule blanche avec une probabilité égale à $\frac{1}{2}$ ou aucune boule blanche avec une probabilité $\frac{1}{2}$. On peut donc conclure :*

$$\boxed{X_1 \text{ suit la loi uniforme sur } [\![0,1]\!]}$$

b) Au cours des deux premiers tirages, on a pu obtenir ou ne pas obtenir une boule blanche à chacun des deux premiers tirages, donc $X_2(\Omega) = \{0,1,2\}$.

- Pour que l'événement $[X_2 = 0]$ soit réalisé, il faut et il suffit que l'on n'ait obtenu aucune boule blanche au cours des deux premiers tirages, donc que l'on ait obtenu deux boules rouges. On a donc :

$[X_2 = 0] = R_1 \cap R_2$ d'où :

$$\begin{aligned} p(X_2 = 0) &= p(R_1 \cap R_2) \\ &= p(R_1)p\left(R_2/R_1\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \end{aligned}$$

donc, comme $p(R_1) \neq 0$:

d'où, comme c=1 :

i.e. :

$= \frac{1}{3}$.

- Pour que l'événement $[X_2 = 2]$ soit réalisé, il faut et il suffit que l'on ait obtenu deux boules blanches au cours des deux premiers tirages. On a donc :

$[X_2 = 2] = B_1 \cap B_2$ d'où :

$p(X_2 = 2) = p(B_1 \cap B_2)$ donc, comme $p(B_1) \neq 0$:

$= p(B_1)p(B_2/B_1)$ d'où, comme c=1 :

$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$ i.e. :

$= \frac{1}{3}$ et enfin, comme : $X_2(\Omega) = \{0,1,2\}$:

- $p(X_2 = 1) = 1 - p(X_1 = 0) - p(X_1 = 2)$ donc :

$= \frac{1}{3}$.

On peut donc conclure :

$\boxed{X_2 \text{ suit la loi uniforme sur } [\![0,2]\!]}$

c) ■ Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, X_n$ suit la loi uniforme sur $[\![0,n]\!]$.

- Au rang n=1. D'après le résultat de la question 3a, la propriété est vérifiée au rang n=1.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que X_n suive la loi uniforme sur $[\![0,n]\!]$. Au cours des n+1 premiers tirages, on a pu obtenir une boule blanche à chacun des tirages, donc : $X_{n+1}(\Omega) \subset [\![0,n+1]\!]$.

  Soit alors $k \in [\![1,n+1]\!]$. Pour l'événement $[X_{n+1} = k]$ soit réalisé, il faut et il suffit que l'on ait obtenu exactement k boules blanches au cours des n+1 premiers tirages, donc que l'on ait obtenu soit exactement k boules blanches au cours des n premiers tirages puis une boule rouge au $(n+1)^{\text{ème}}$, soit exactement k-1 boules blanches au cours des n premiers tirages puis une boule blanche au $(n+1)^{\text{ème}}$. On a donc :

$[X_{n+1} = k] = \left(([X_n = k] \cap R_{n+1}) \cup ([X_n = k-1] \cap B_{n+1})\right)$ d'où :

$p(X_{n+1} = k) = p\left(([X_n = k] \cap R_{n+1}) \cup ([X_n = k-1] \cap B_{n+1})\right)$ donc, ces évènements étant incompatibles :

$= p([X_n = k] \cap R_{n+1}) + p([X_n = k-1] \cap B_{n+1})$.

Trois cas se présentent alors :

- si k=0. Dans ce cas, l'événement $[X_n = k-1]$ est impossible, et on a :

$p(X_{n+1}=0) = p\left([X_n=0]\cap R_{n+1}\right)$ donc, comme, par hypothèse de récurrence, $p(X_n=0)\neq 0$:

$= p(X_n=0)p\left(R_{n+1}/X_n=0\right)$ soit encore, comme, par hypothèse, X_n suit la loi uniforme sur $[\![0,n]\!]$:

$= \dfrac{1}{n+1}p\left(R_{n+1}/X_n=0\right)$.

Or, sachant que l'événement $[X_n=0]$ est réalisé, l'urne contient n+2 boules dont n+1 rouges avant de procéder au $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage. Les tirages étant équiprobables, on a donc : $p\left(R_{n+1}/X_n=0\right)=\dfrac{n+1}{n+2}$, et donc : $p(X_{n+1}=0)=\dfrac{1}{n+2}$,

- si $k\in[\![1,n]\!]$. Dans ce cas $[X_n=k-1]$ et $[X_n=k]$ sont des évènements de probabilité non nulle, et on a :

$p(X_{n+1}=k) = p(X_n=k)p\left(R_{n+1}/X_n=k\right)+p(X_n=k-1)p\left(B_{n+1}/X_n=k-1\right)$ donc, par hypothèse de récurrence :

$= \dfrac{1}{n+1}\left(p\left(R_{n+1}/X_n=k\right)+p\left(B_{n+1}/X_n=k-1\right)\right)$.

Or, sachant que l'événement $[X_n=k]$ est réalisé, l'urne contient n+2 boules dont k+1 blanches avant de procéder au $(n+1)^{\text{ème}}$ tirage. Les tirages étant équiprobables, on a donc :

$p\left(R_{n+1}/X_n=k\right)=\dfrac{n+1-k}{n+2}$ et :

$p\left(B_{n+1}/X_n=k-1\right)=\dfrac{k}{n+2}$ d'où :

$\forall k\in[\![1,n]\!], p(X_{n+1}=k)=\dfrac{1}{n+2}$,

- si k=n+1. Dans ce cas, l'événement $[X_n=k]$ est impossible, et on a :

$p(X_{n+1}=n+1) = p\left([X_n=n]\cap B_{n+1}\right)$ donc, comme, par hypothèse de récurrence, $p(X_n=n)\neq 0$:

$= p(X_n=n)p\left(B_{n+1}/X_n=n\right)$ soit encore, comme, par hypothèse, X_n suit la loi uniforme sur $[\![0,n]\!]$:

$$=\frac{1}{n+1}p\left(B_{n+1}/X_n=n\right).$$

Or, sachant que l'événement $[X_n=n]$ est réalisé, l'urne contient n+2 boules dont n+1 blanches avant de procéder au (n+1)ème tirage. Les tirages étant équiprobables, on a donc : $p\left(B_{n+1}/X_n=n\right)=\frac{n+1}{n+2}$, et donc :

$$p(X_{n+1}=n+1)=\frac{1}{n+2}.$$

On a donc :

$$\forall k\in[\![0,n+1]\!], p(X_{n+1}=k)=\frac{1}{n+2}.$$

Ainsi, X_{n+1} suit la loi uniforme sur $[\![0,n+1]\!]$, donc la propriété est vérifiée au rang n+1.

- On peut finalement conclure :

$$\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N}^*, X_n \text{ suit la loi uniforme sur } [\![0,n]\!]}$$

- On a donc :

$\forall n\in\mathbb{N}^*, E(X_n)=\sum_{k=0}^{n} kp(X_n=k)$ donc :

$=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} k$ d'où, comme $\forall n\in\mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$:

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*, E(X_n)=\frac{n}{2}}$$

- On a :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, E(X_n^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 p(X_n = k)$ donc :

$= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} k^2$ d'où, comme $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n} k^2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$:

$= \frac{n(2n+1)}{6}$ et donc, comme : $\forall n \in \mathbb{N}^*, V(X_n) = E(X_n^2) - (E(X_n))^2$

$= \frac{n(2n+1)}{6} - \frac{n^2}{4}$ soit encore :

$= \frac{2n(2n+1) - 3n^2}{12}$ soit finalement :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, V(X_n) = \frac{n^2 + 2n}{12}}$$