ECRICOME

Banque d'épreuves écrites communes aux concours des Ecoles:
ESC Bordeaux, ESC Marseille-Provence, ESC Reims, ESC Rouen, ICN Nancy

CONCOURS D'ADMISSION 1997

MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures
Option économique

Aucun document n'est autorisé
L'énoncé comporte 7 pages.

Les canditats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

EXERCICE 1

est un réel strictement positif. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n(\alpha) = \frac{n!}{\prod_{k=0}^{n}(\alpha + k)}$$

1. *Étude de la convergence de la suite* $(u_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$

   a. Montrer que la suite $(u_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et convergente. Que peut-on en déduire pour la série de terme général $(u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha))$?
   On note $\ell(\alpha)$ la limite de la suite $(u_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$.

   b. On suppose que $\ell(\alpha)$ est non nulle. Démontrer que :

   $$u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha\ell(\alpha)}{n}$$

   c. Déduire de ce qui précède que $\ell(\alpha) = 0$.

2. Dans cette question : $\alpha \in]0, 1]$.

   a. Montrer que :

   $$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n(\alpha) \geqslant \frac{1}{n+\alpha}$$

   b. Quelle est la nature de la série de terme général $u_n(\alpha)$?

3. On pose, pour tout entier naturel n :

   $$I_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}(1 - e^{-t})^n \, dt$$

   a. Étudier la convergence de l'intégrale généralisée $I_n(\alpha)$ et calculer $I_0(\alpha)$.

   b. Soit un réel x strictement positif. Intégrer par parties :

   $$\int_0^{x} e^{-\alpha t}(1 - e^{-t})^n \, dt$$

   et en déduire une relation simple entre $I_n(\alpha)$ et $I_{n-1}(\alpha+1)$, pour tout n entier naturel non nul.

c. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad I_n(\alpha) = u_n(\alpha)$$

4. *On suppose désormais que $\alpha > 1$.*

a. Montrer que, pour tout N entier naturel :

$$\sum_{n=0}^{N} I_n(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1} - I_{N+1}(\alpha - 1)$$

b. En déduire que la série de terme général $u_n(\alpha)$ est convergente, et donner en fonction de α la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(\alpha)$.

EXERCICE 2

$M_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.
$M_{3,1}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices colonnes à trois lignes dont les coefficients sont réels.
On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ \frac{3}{2} & -2 & 6 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

où x, y et z sont des nombres réels.
On définit alors une suite de matrices colonnes $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} X_0 \in M_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \forall n \in \mathbb{N} \qquad X_{n+1} = AX_n + B \end{cases}$$

1. Montrer que 0, $\dfrac{1}{2}$ et 1 sont les valeurs propres de A, et préciser des vecteurs propres u, v et w qui leur sont respectivement associés.

2. Justifier les affirmations suivantes :
   - Il existe un unique triplet (α, β, γ) de $\mathbb{R}^3$ tel que :
   $$B = \alpha u + \beta v + \gamma w$$
   - Pour tout entier naturel n, il existe un unique triplet $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ de $\mathbb{R}^3$ tel que :
   $$X_n = \alpha_n u + \beta_n v + \gamma_n w$$

3. Établir par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \begin{cases} \alpha_n = \alpha \\ \beta_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (\beta_0 - 2\beta) + 2\beta \\ \gamma_n = \gamma_0 + n\gamma \end{cases}$$

4. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites réelles telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

On dit que la suite de matrices colonnes $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si les suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Dans ce cas on écrit :

$$\lim X_n = \begin{pmatrix} \lim a_n \\ \lim b_n \\ \lim c_n \end{pmatrix}$$

a. Prouver que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si le réel γ (introduit en 2.2) est nul.

b. En déduire que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si :

$$3x - 4y + 12z = 0$$

5. On dit que le couple (A, B) admet une position d'équilibre stable si la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la même limite quelle que soit la valeur de X_0.
Expliquer pourquoi, quelle que soit la valeur de B, le couple (A, B) n'admet pas de position d'équilibre stable.

3. PROBLÈME

ans tout le problème (qui comporte *deux parties indépendantes*), on suppose que la urée, exprimée en minutes, d'une communication téléphonique, est une variable aléatoire éelle D qui suit la loi exponentielle de paramètre α.

.1. Comparaison de deux tarifications

our ses communications, on propose à l'utilisateur d'une ligne téléphonique deux tarifiations T_1 et T_2, exprimées en francs, définies de la façon suivante :

- $T_1 = aD$, où a est un nombre réel strictement supérieur à 1, qui représente le prix une minute de communication ;
- T_2 est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et, pour tout n entier naturel non nul :

$$\{T_2 = n\} = \{n - 1 < D \leqslant n\}$$

1. Calculer $E(T_1)$ en fonction de a et de α.

2. Déterminer la loi de T_2. De quelle loi s'agit-il ? Exprimer $E(T_2)$ en fonction de α.

3. On pose :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}^{*+} & \varphi(t) = \dfrac{t}{1 - e^{-t}} \\ \varphi(0) = 1 & \end{cases}$$

   a. Montrer que φ est une fonction de classe C^1 sur $[0, +\infty[$.

   b. On définit, de plus, la fonction ψ sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^{+} \qquad \psi(t) = 1 - (1 + t)e^{-t}$$

   Utiliser cette fonction pour en déduire que φ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$.

. *Comparaison des tarifications*

   a. Montrer qu'il existe un unique réel α_0 strictement positif tel que $\varphi(\alpha_0) = a$.

   b. Préciser quelle est, en moyenne, la tarification la plus avantageuse suivant la valeur de la durée moyenne d'une communication.

. Pour $a = 1,25$ donner, en utilisant votre calculatrice, une valeur approchée de $\dfrac{1}{\alpha_0}$ (on ne donnera que les deux premières décimales fournies par la calculatrice).

3.2. Étude d'un standard téléphonique

Dans toute cette partie, θ est un nombre réel strictement positif représentant un temps exprimé en minutes. Un standard téléphonique de capacité illimitée reçoit des communications téléphoniques entre l'instant 0 et l'instant θ inclus.

3.2.1. Cas d'une seule communication

On désigne par n un entier naturel non nul. L'instant où débute la communication est une variable aléatoire réelle I_n telle que :

$$\begin{cases} I_n(\Omega) = \left\{ \dfrac{\theta}{n}, \dfrac{2\theta}{n}, \ldots, \dfrac{(n-1)\theta}{n}, \theta \right\} \\ \forall k \in [1, n]_{\mathbb{N}} \qquad P\left(I_n = \dfrac{k\theta}{n}\right) = \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

où P désigne la probabilité. De plus, I_n et D (la durée aléatoire de la communication), sont indépendantes.

1. Pour tout réel positif t, rappeler quelle est l'expression de $P(D > t)$ en fonction de t et de α.

2. En déduire, pour k élément de $[1, n]_{\mathbb{N}}$, la probabilité conditionnelle de $\{D + I_n > \theta\}$ sachant $\left\{ I_n = \dfrac{k\theta}{n} \right\}$.

3. Démontrer l'égalité suivante :

$$P(D + I_n > \theta) = \frac{1}{n} \left(\frac{1 - e^{-\alpha\theta}}{1 - e^{-\frac{\alpha\theta}{n}}} \right)$$

4. Déterminer :

$$\lim_{n \to +\infty} P(D + I_n > \theta)$$

2.2. Étude de l'encombrement du standard à l'instant θ

ıns cette partie on définit les nombres réels p et q par :

$$p = \frac{1 - e^{-\alpha\theta}}{\alpha\theta} \qquad \text{et} \qquad q = 1 - p$$

suppose désormais que la probabilité qu'une communication reçue dans l'intervalle de ıps $[0, \theta]$ se poursuive au-delà de l'instant θ est égale à p.
note N_θ la variable aléatoire réelle égale au nombre de communications reçues dans tervalle de temps $[0, \theta]$ et l'on suppose que N_θ suit une loi de Poisson de paramètre θ.
note C_θ la variable aléatoire réelle égale au nombre de communications reçues dans tervalle de temps $[0, \theta]$ qui se poursuivent au-delà de l'instant θ.
instants aléatoires où les communications se terminent sont mutuellement indépendants.

.. *Loi de probabilité de C_θ*

a. Soit r un entier naturel. Quelle est la loi conditionnelle de C_θ sachant que $\{N_\theta = r\}$?

b. Démontrer que l'on a :

$$\forall r \in \mathbb{N} \qquad \forall k \in [0, r]_{\mathbb{N}} \qquad P\left[\{C_\theta = k\} \cap \{N_\theta = r\}\right] = \frac{e^{-\theta}(p\theta)^k(q\theta)^{r-k}}{k!(r-k)!}$$

c. En déduire, pour tout entier naturel k, une expression simple de $P(C_\theta = k)$ en fonction de k, p et θ. Quelle est la loi de probabilité de C_θ ?

Étude de l'espérance de C_θ

a. Déterminer l'expression de $E(C_\theta)$ en fonction de θ et de α.

b. Quelle est la limite de $E(C_\theta)$ lorsque θ tend vers $+\infty$? Vérifier qu'elle majore $E(C_\theta)$.

Exercice 1

1) a) • Comme α est strictement positif, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n(\alpha) > 0$. On peut alors écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}(\alpha)}{u_n(\alpha)} = \frac{(n+1)!}{\prod_{k=0}^{n+1}(\alpha+k)} \times \frac{\prod_{k=0}^{n}(\alpha+k)}{n!}$$ donc :

$$= \frac{n+1}{n+1+\alpha}$$ d'où, comme $\alpha > 0$:

$$< 1.$$

La suite $(u_n(\alpha))_{n \in \mathbb{N}}$ étant positive, on peut donc conclure :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n(\alpha))_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$$

• La suite $(u_n(\alpha))_{n \in \mathbb{N}}$ étant décroissante et minorée (par 0), on peut également conclure :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n(\alpha))_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge}}$$

• On a :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n}(u_k(a) - u_{k+1}(a)) = u_0(\alpha) - u_{n+1}(\alpha)$, les termes s'annulant deux à deux.

Comme la suite $(u_n(\alpha))_{n \in \mathbb{N}}$ converge, on peut donc écrire que la suite $\left(\sum_{k=0}^{n}(u_k(a) - u_{k+1}(a))\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et l'on peut donc conclure :

$$\boxed{\text{La série de terme général } u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha) \text{ converge}}$$

b) Supposons que $\ell(\alpha)$ soit non nulle.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha) = u_n(\alpha)\left(1 - \frac{n+1}{n+\alpha+1}\right)$$ soit encore :

$$= \frac{\alpha u_n(\alpha)}{n+\alpha+1}.$$

Ainsi, on a : $u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha) \sim \frac{\alpha u_n(\alpha)}{n}$. De plus, comme $\ell(\alpha) \neq 0$, on a : $u_n(\alpha) \sim \ell(\alpha)$, et l'on peut conclure :

$$\boxed{u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha) \sim \frac{\alpha \ell(\alpha)}{n}}$$

c) Comme $\ell(\alpha) \neq 0$ et $\alpha \neq 0$, la série de terme général $\frac{\alpha \ell(\alpha)}{n}$ est divergente. D'après les critères de comparaison des séries à termes positifs, on peut alors écrire, d'après le résultat de la question précédente, que la série de terme général $u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha)$ diverge. Il y a donc contradiction avec le résultat de la question 1a. On peut donc conclure :

$$\boxed{\ell(\alpha) = 0}$$

2) a) On a :

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n(\alpha) = \dfrac{n!}{\prod_{k=0}^{n} (\alpha + k)}$ soit encore :

$= \dfrac{1}{n+\alpha} \prod_{k=0}^{n-1} \dfrac{k+1}{k+\alpha}$ soit finalement, comme $\alpha \in]0,1]$: $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \dfrac{k+1}{k+\alpha} \geq 1$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n(\alpha) \geq \frac{1}{n+\alpha}}$$

b) Comme la série de terme général $\frac{1}{n+\alpha}$ diverge, on peut alors conclure, d'après les critères de comparaison des séries à termes positifs :

$$\boxed{\text{La série de terme général } u_n(\alpha) \text{ diverge}}$$

3) a) • Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto e^{-\alpha t}(1 - e^{-t})^n$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. De plus, on a : $\lim_{t \to +\infty} t^2 e^{-xt}(1 - e^{-t})^n = 0$ (croissances comparées). Par définition de la limite, on peut donc écrire, cette fonction étant positive sur $\mathbb{R}^+$:

$\exists t_0 \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall t \geq t_0,\ 0 \leq t^2 e^{-\alpha t}(1 - e^{-t})^n \leq 1$ donc, comme : $\forall t \geq t_0,\ t^2 > 0$:

$\exists t_0 \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall t \geq t_0,\ 0 \leq e^{-\alpha t}(1 - e^{-t})^n \leq \dfrac{1}{t^2}$.

ECRICOME 1997 Voie Eco

Exercice 1

Comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge, on peut donc écrire, d'après les théorèmes de comparaison des intégrales de fonctions positives que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}(1-e^{-t})^n dt$ converge. On peut alors conclure :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ l'intégrale définissant } I_n(\alpha) \text{ converge}}$$

* On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \int_0^x e^{-\alpha t} dt = \left[\frac{-e^{-\alpha t}}{\alpha}\right]_0^x$$
soit :
$$= \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha x}).$$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-\alpha x} = 0$ (car $\alpha > 0$), on en déduit alors, par passage à la limite, que $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha}$, et donc que :

$$\boxed{I_0(\alpha) = \frac{1}{\alpha}}$$

b) * Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les fonctions $t \mapsto -\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha}$ et $t \mapsto (1 - e^{-t})^n$ étant de classe C^1 sur $[0, x]$ $(x > 0)$, on obtient, à l'aide d'une intégration par parties (on intègre la fonction $t \mapsto e^{-\alpha t}$ et on dérive la fonction $t \mapsto (1 - e^{-t})^n$) :

$$\int_0^x e^{-\alpha t}(1-e^{-t})^n dt = \left[-\frac{e^{-\alpha t}(1-e^{-t})}{\alpha}\right]_0^x + \frac{n}{\alpha}\int_0^x e^{-\alpha t} e^{-t}(1-e^{-t})^{n-1} dt$$
d'où :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^x e^{-\alpha t}(1-e^{-t})^n dt = -\frac{e^{-\alpha x}(1-e^{-x})}{\alpha} + \frac{n}{\alpha}\int_0^x e^{-\alpha t}e^{-t}(1-e^{-t})^{n-1} dt}$$

* On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{-\alpha x}(1 - e^{-x})^n}{\alpha} = 0$, et d'après la question 3a, pour $n \in \mathbb{N}$ et α strictement positif, $I_n(\alpha)$ existe donc, en faisant tendre x vers $+\infty$ dans l'égalité précédente :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, I_n(\alpha) = \frac{n}{\alpha} I_{n-1}(\alpha + 1)}$$

c) On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n(\alpha) = \frac{n!}{\prod_{k=0}^{n}(\alpha+k)}$$ d'où :

$$= \frac{n}{\alpha} \times \frac{(n-1)!}{\prod_{k=1}^{n}(\alpha+k)}$$ soit encore, en effectuant le changement d'indice k'=k-1 :

$$= \frac{n}{\alpha} \times \frac{(n-1)!}{\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha+1+k)}$$ d'où :

$$= \frac{n}{\alpha} u_{n-1}(\alpha+1).$$

Les suites $\left(I_n(\alpha)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(u_n(\alpha)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient donc la même relation de récurrence. Comme $u_0(\alpha) = I_0(\alpha)$, on peut donc conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I_n(\alpha) = u_n(\alpha)}$$

4) a) On a :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^{N} I_n(\alpha) = \sum_{n=0}^{N}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}(1-e^{-t})^n dt$$ donc, par linéarité de l'intégration, les intégrales en présence étant convergentes :

$$= \int_0^{+\infty}\left(e^{-\alpha t}\sum_{n=0}^{N}(1-e^{-t})^n\right)dt$$ d'où, en reconnaissant la somme des termes d'une suite géométrique de raison $1 - e^{-t} \neq 1$ $(t \geq 0)$:

$$= \int_0^{+\infty}\left(e^{-\alpha t}\frac{1-(1-e^{-t})^{N+1}}{e^{-t}}\right)dt$$ soit encore :

$$= \int_0^{+\infty}\left(e^{-(\alpha-1)t} - e^{-\alpha t}(1-e^{-t})^{N+1}\right)dt$$ donc, par linéarité de l'intégration, les intégrales en présence étant convergentes $(\alpha > 1)$:

$$= \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha-1)t}dt - \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}(1-e^{-t})^{N+1}dt$$ soit finalement :

$$= I_0(\alpha-1) - I_{N+1}(\alpha-1).$$

D'après le résultat de la question 3a, on peut finalement conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{n=0}^{N} I_n(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1} - I_{N+1}(\alpha - 1)}$$

b) D'après le résultat de la question 3c, on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{n=0}^{N} u_n(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1} - u_{N+1}(\alpha - 1).$$

Comme d'après la question 1.c, la suite $\left(u_n(\alpha)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, on peut donc écrire que la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k(\alpha)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{\alpha + 1}$, et l'on peut donc conclure :

$$\boxed{\text{La série de terme général } u_n(\alpha) \text{ converge, de somme } \frac{1}{\alpha + 1}}$$

Exercice 2

1) • 0 est valeur propre de A si, et seulement si, il existe un vecteur X non nul de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que AX = 0. Or, on a :

$$AX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ \frac{3}{2} & -2 & 6 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} X = 0$$ donc $(L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1,\ L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1)$:

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} X = 0$$ soit encore $(L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2)$:

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0$$ d'où, en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z = 0 \\ -4y + 6z = 0 \end{cases}$$ et donc :

$$\Leftrightarrow X \in Vect\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right).$$

On peut donc conclure :

$$\boxed{0 \text{ est valeur propre de A, de sous-espace propre associé } E_0 = Vect(u) \text{ avec } u = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

• $\frac{1}{2}$ est valeur propre de A si, et seulement si, il existe un vecteur X non nul de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $\left(A - \frac{1}{2} I\right)X = 0$. Or, on a :

$$\left(A - \frac{1}{2} I\right)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & 6 \\ \frac{1}{2} & -1 & 2 \end{pmatrix} X = 0$$ donc $(L_2 \leftarrow 2L_2 - 6L_1,\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1)$:

Exercice 2

$$\left(A - \frac{1}{2}I\right)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0$$ d'où, en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x + 2z = 0 \\ -5y = 0 \end{cases}$$ et donc :

$$\Leftrightarrow X \in Vect\left(\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

On peut donc conclure :

$\boxed{\frac{1}{2} \text{ est valeur propre de A, de sous-espace propre associé } E_{1/2} = Vect(v) \text{ avec } v = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$

- 1 est valeur propre de A si, et seulement si, il existe un vecteur X non nul de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que (A - I)X = 0. Or, on a :

$$(A - I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ \frac{3}{2} & -3 & 6 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} X = 0$$ donc $(L_3 \leftarrow 6L_3 - 2L_2)$:

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ \frac{3}{2} & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} X = 0$$ d'où, en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ \frac{3}{2}x - 3y + 6z = 0 \end{cases}$$ et donc :

$$\Leftrightarrow X \in Vect\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

On peut donc conclure :

$\boxed{1 \text{ est valeur propre de A, de sous-espace propre associé } E_1 = Vect(w) \text{ avec } w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$

2) • u, v et w étant des vecteurs propres de A associés à des valeurs propres différentes, la famille (u, v, w) est libre. Comme elle comporte trois vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et comme $\dim \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = 3$, elle forme donc une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Comme $B \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on peut donc conclure :

$$\boxed{\text{Il existe un unique triplet } (\alpha, \beta, \gamma) \text{ de réels tel que } B = \alpha u + \beta v + \gamma w}$$

• De même, comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on peut conclure :

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ l existe un unique triplet } (\alpha_n, \beta_n, \gamma_n) \text{ de réels tel que } X_n = \alpha_n u + \beta_n v + \gamma_n w}$$

3) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{cases} \alpha_n = \alpha \\ \beta_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (\beta_0 - \beta_n) + 2\beta \\ \gamma_n = \gamma_0 + n\gamma \end{cases}$.

• Au rang n = 1. On a :

$X_1 = AX_0 + B$ donc :

$= A(\alpha_0 u + \beta_0 v + \gamma_0 w) + \alpha u + \beta v + \gamma w$ soit encore :

$= \alpha_0 Au + \beta_0 Av + \gamma_0 Aw + \alpha u + \beta v + \gamma w$ donc, par définition de u, v, w :

$= \alpha u + \left(\frac{1}{2}(\beta_0 - 2\beta) + 2\beta\right) v + (\gamma_0 + \gamma) w$ donc, par unicité des coefficients $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha \\ \beta_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^1 (\beta_0 - \beta_1) + 2\beta \\ \gamma_1 = \gamma_0 + \gamma \end{cases}.$$

La propriété est donc bien vérifiée au rang n = 1.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\begin{cases} \alpha_n = \alpha \\ \beta_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (\beta_0 - \beta_n) + 2\beta \\ \gamma_n = \gamma_0 + n\gamma \end{cases}$. On a :

$X_{n+1} = AX_n + B$ donc d'après la question 2. :

$= A(\alpha_n u + \beta_n v + \gamma_n w) + \alpha u + \beta v + \gamma w$ soit encore :

$X_{n+1} = \alpha_n Au + \beta_n Av + \gamma_n Aw + \alpha u + \beta v + \gamma w$ donc, par définition de u, v, w :

$= \alpha u + \left(\frac{1}{2}\beta_n + \beta\right) v + (\gamma_n + \gamma) w$ donc, par unicité des coefficients $(\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}, \gamma_{n+1})$:

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = \alpha \\ \beta_{n+1} = \frac{1}{2}\beta_n + \beta \\ \gamma_{n+1} = \gamma_n + \gamma \end{cases}$$

d'où, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = \alpha \\ \beta_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (\beta_0 - \beta_{n+1}) + 2\beta. \\ \gamma_{n+1} = \gamma_0 + (n+1)\gamma \end{cases}$$

Si la propriété est vérifiée au rang n, elle l'est donc également au rang n + 1.

• On peut finalement conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} \alpha_n = \alpha \\ \beta_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} (\beta_0 - \beta_n) + 2\beta \\ \gamma_n = \gamma_0 + n\gamma \end{cases}}$$

4) a) (u, v, w) étant une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A, on peut écrire, en notant P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à la base (u, v, w) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$$ donc, comme $P = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$:

$$= \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$$ d'où :

$$= \begin{pmatrix} -4(\alpha_n + \beta_n) + 2\gamma_n \\ 3\alpha_n + \gamma_n \\ 2\alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, les suites $\left(-4(\alpha_n + \beta_n) + 2\gamma_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(3\alpha_n + \gamma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(2\alpha_n + \beta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent.

Or, d'après le résultat de la question précédente, on peut écrire que les suites $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent (respectivement vers α et 2β). Ainsi, la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, la suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

Supposons alors que γ ne soit pas nul. D'après le résultat de la question précédente, on peut alors écrire que la suite $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ a une limite infinie. On peut finalement conclure.

$$\boxed{\text{La suite } (X_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge si, et seulement si, le réel } \gamma \text{ est nul}}$$

b) (x, y, z) et (α, β, γ) étant les coordonnées respectives de la matrice B dans la base canonique et dans la base (u, v, w) de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$ d'où :

$$= \begin{pmatrix} -4(\alpha + \beta) + 2\gamma \\ 3\alpha + \gamma \\ 2\alpha + \beta \end{pmatrix}$$ soit encore :

$$\begin{cases} -4\alpha - 4\beta + 2\gamma = x \\ 3\alpha + \gamma = y \\ 2\alpha + \beta = z \end{cases}$$ donc :

$$\begin{cases} -\dfrac{4}{3}(y - \gamma) - 4z + \dfrac{8}{3}(y - \gamma) + 2\gamma = x \\ \alpha = \dfrac{1}{3}(y - \gamma) \\ \alpha = z - 2\alpha \end{cases}$$ d'où :

$-4y + 4\gamma - 12z + 8y - 8\gamma + 2\gamma = 3x$ soit finalement :

$$\gamma = \frac{3x - 4y + 12z}{2}.$$

On peut finalement conclure :

$$\boxed{\text{La suite } (X_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge si, et seulement si } 3x - 4y + 12z = 0}$$

5) Supposons que la matrice B vérifie la condition nécessaire et suffisante de convergence de la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dans ce cas, les suites $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent respectivement vers α, 2β et γ_0.

Ainsi, en considérant l'expression des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ déterminée dans la question 4a, on peut écrire que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice $\begin{pmatrix} -4(\alpha+\beta)+2\gamma \\ 3\alpha+\gamma \\ 2\alpha+\beta \end{pmatrix}$. Cette limite dépend donc de la valeur de X_0, et ce quelle que soit la matrice B choisie. On peut donc conclure :

$$\boxed{\text{Quelle que soit la valeur de B, le couple (A, B) n'admet pas de position d'équilibre stable}}$$

Problème

3.1. Comparaison de deux tarifications

1) Comme $T_1 = aD$, on peut écrire, par linéarité de l'espérance : $E(T_1) = aE(D)$. Comme D suit une loi exponentielle de paramètre α, on peut donc conclure :

$$\boxed{E(T_1) = \frac{a}{a}}$$

2) ✿ Par définition de T_2, on a $T_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et :

n $\mathbb{N}^*$, $p(T_2 = n) = p(n - 1 < D \leq n)$ donc, comme D suit une loi exponentelle de paramètre α :

$= \int_{n-1}^{n} \alpha e^{-\alpha t} dt$ i.e. :

$= \left[-e^{-at} \right]_{n-1}^{n}$ d'où :

$= -e^{-\alpha n} + e^{-\alpha(n-1)}$ soit finalement :

$= e^{-\alpha(n-1)}(1 - e^{-\alpha})$.

On peut finalement conclure :

$$\boxed{T_2 \text{ suit la loi géométrique de paramètre } 1 - e^{-\alpha}}$$

✿ On peut également conclure :

$$\boxed{E(T_2) = \frac{1}{1 - e^{-\alpha}}}$$

3) a) ✿ ϕ est de classe C^1 sur R_+^* comme quotient, dont le dénominateur ne s'annule pas, de fonctions de classe C^1 sur R_+^*.

✿ De plus, d'après les équivalents de référence, on peut écrire :

$\phi(t) \underset{0}{\sim} \frac{t}{t}$ d'où :

$\lim\limits_{t \to 0} \phi(t) = 1$.

Comme $\phi(0) = 1$, ϕ est donc continue sur $\mathbb{R}^+$.

• Enfin, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \phi'(t) = \frac{1-e^{-t}-te^{-t}}{(1-e^{-t})^2} \quad \text{soit encore :}$$

$$= \frac{1-(1+t)e^{-t}}{(1-e^{-t})^2}.$$

Or, à l'aide d'un développement limité de la fonction exponentielle à l'ordre 2 au voisinage de 0, on peut écrire qu'il existe une fonction ε de limite nulle en 0 telle que :

$e^{-t} = 1 - t + \frac{t^2}{2} + t^2\varepsilon(t)$ donc il existe une fonction ε_1 de limite nulle en 0 telle que :

$(1+t)e^{-t} = 1 - \frac{t^2}{2} + t^2\varepsilon_1(t)$ d'où :

$1-(1+t)e^{-t} = \frac{t^2}{2} - t^2\varepsilon_1(t)$ et donc :

$1-(1+t)e^{-t} \underset{0}{\sim} \frac{t^2}{2}$ d'où, comme $1-e^{-t} \underset{0}{\sim} t$:

$\phi'(t) \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}$.

Ainsi, ϕ' admet une limite finie en 0. Comme ϕ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut donc conclure, d'après le théorème de prolongement des fonctions de classe C^1 :

$$\boxed{\phi \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^+}$$

b) D'après l'expression de ϕ' déterminée à la question précédente, on peut écrire que ϕ' est du signe de ψ sur $\mathbb{R}_+^*$. Or, ψ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme somme et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^+$, et on a :

$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ \psi'(t) = -e^{-t} + (1+t)e^{-t}$ soit :

$= te^{-t}$ d'où :

$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \psi'(t) > 0.$

Ainsi, ψ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. On a donc :

$\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \psi(t) > \psi(0)$ soit :

$> 0.$

Ainsi, ψ, donc ϕ', est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. ϕ est donc continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Comme $\phi(0) = 1$ et $\lim_{t \to +\infty} \phi(t) = +\infty$, on peut finalement conclure, d'après le théorème de la bijection :

$$\boxed{\phi \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R}^+ \text{ sur } [1, +\infty[}$$

4) a) D'après le résultat de la question précédente, on peut donc conclure, comme $a > 1$:

$$\boxed{\text{Il existe un unique réel } \alpha_0 \text{ strictement positif tel que } \phi(\alpha_0) = a}$$

b) D'après le résultat des questions 1 et 2, on peut écrire :

$E(T_1) < E(T_2) \Leftrightarrow \dfrac{a}{a} < \dfrac{1}{1-e^{-\alpha}}$ soit encore, comme $\alpha > 0$:

$\Leftrightarrow a < \dfrac{\alpha}{1-e^{-\alpha}}$ donc, d'après le résultat de la question précédente :

$\Leftrightarrow \phi(\alpha_0) < \phi(\alpha)$ d'où, ϕ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$:

$\Leftrightarrow \alpha_0 < \alpha$ donc, en composant par la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{\alpha} < \dfrac{1}{\alpha_0}$.

Or, comme D suit la loi exponentielle de paramètre α, la durée moyenne de communication (ou espérance de D) est égale à $\dfrac{1}{\alpha}$. On peut donc conclure :

> La tarification T_2 est plus avantageuse que la tarification T_1 si, et seulement si, la durée moyenne de communication est inférieure à $\dfrac{1}{\alpha_0}$.

5) Dans le cas où $a = 1{,}25$, on peut conclure, en procédant par dichotomie à l'aide d'une calculatrice :

$$\boxed{\frac{1}{\alpha_0} = 2{,}15}$$

3.2. Etude d'un standard téléphonique

3.2.1. Cas d'une seule communication

1) On a :

$\forall t \in \mathbb{R}^+$, $p(D > t) = 1 - p(D \leq t)$ donc, comme D suit une loi exponentielle de paramètre α :

$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ p(D > t) = 1 - \int_0^t a e^{-au} du$ i.e. :

$= 1 - \left[-e^{-au}\right]_0^t$ d'où :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}^+,\ p(D > t) = e^{-\alpha t}}$$

2) On a :

$\forall k \in [\![1, n]\!],\ p\left(\left(D + I_n > \theta\right) / \left(I_n = \frac{k\theta}{n}\right)\right) = p\left(D > \theta - \frac{k\theta}{n}\right)$ soit encore :

$= p\left(D > \frac{\theta(n-k)}{n}\right)$ donc, d'après le résultat précédent :

$$\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!],\ p\left(\left(D + I_n > \theta\right) / \left(I_n = \frac{k\theta}{n}\right)\right) = e^{-\alpha\frac{\theta(n-k)}{n}}}$$

3) La famille $\left(\left[I_n = \frac{k\theta}{n}\right]\right)_{1 \leq k \leq n}$ constituant un système complet d'événements de probabilités non nulles, on peut écrire, d'après la formule des probabilités totales :

$p(D + I_n > \theta) = \sum_{k=1}^{n} p\left(I_n = \frac{k\theta}{n}\right) p_{\left(I_n = \frac{k\theta}{n}\right)}\left(D + I_n > \theta\right)$ donc, d'après la loi de I_n et le résultat précédent :

$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{-\alpha\frac{\theta(n-k)}{n}}$ d'où :

$= \frac{e^{-\alpha\theta}}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(e^{\alpha\theta/n}\right)^k$

Or, comme $\alpha\theta > 0$, on a : $e^{\alpha\frac{\theta}{n}} \neq 1$. Ainsi, en reconnaissant la somme des termes d'une suite géométrique de raison $e^{\alpha\frac{\theta}{n}}$, on peut écrire :

$p(D + I_n > \theta) = \frac{e^{-\alpha\theta}}{n} \times e^{\alpha\frac{\theta}{n}} \times \frac{1 - \left(e^{\alpha\frac{\theta}{n}}\right)^n}{1 - e^{\alpha\frac{\theta}{n}}}$.

Comme $e^{\alpha\frac{\theta}{n}} = \dfrac{1}{e^{-\alpha\frac{\theta}{n}}}$, et comme $\left(e^{\alpha\theta/n}\right)^n = e^{\alpha\theta}$, on peut finalement conclure :

$$\boxed{p(D + I_n > \theta) = \frac{1}{n}\left(\frac{1 - e^{-\alpha\theta}}{1 - e^{-\alpha\frac{\theta}{n}}}\right)}$$

4) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha\dfrac{\theta}{n} = 0$, on a : $1 - e^{-\alpha\frac{\theta}{n}} \underset{0}{\sim} \alpha\dfrac{\theta}{n}$. D'après le résultat de la question précédente, on peut donc écrire :

$p(D + I_n > \theta) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{\alpha\theta}(1 - e^{-\alpha\theta})$.

On peut alors conclure :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} p(D + I_n > \theta) = \frac{1 - e^{-\alpha\theta}}{\alpha\theta}}$$

3.2.2. Etude de l'encombrement du standard à l'instant θ

1) a) Sachant que l'événement $[N_\theta = r]$ est réalisé, la variable aléatoire C_θ est égale au nombre de succès (une communication se poursuit au delà de l'instant θ) dans une suite de r épreuves indépendantes (les instants aléatoires où les communications se terminent étant mutuellement indépendants) à deux issues (une communication donnée se poursuit ou non au delà de l'instant θ) de même probabilité de succès p. On peut donc conclure :

La loi conditionnelle de C_θ conditionnée par l'événement $[N_\theta = r]$ est la loi binomiale de paramètres r et p.

b) On a :

$\forall r \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![0, r]\!],\ p\big([C_\theta = k] \cap [N_\theta = r]\big) = p(N_\theta = r)\, p\big(C_\theta{=}k / N_\theta{=}r\big)$ donc, comme N_θ suit la loi de Poisson de paramètre θ et d'après le résultat de la question précédente :

$= \dfrac{e^{-\theta}\theta^r}{r!} \times C_r^k\, p^k\, q^{r-k}$ soit finalement :

$$\boxed{\forall r \in \mathbb{N},\ \forall k \in [\![0, r]\!],\ p\big([C_\theta = k] \cap [N_\theta = r]\big) = \frac{e^{-\theta}(p\theta)^k (q\theta)^{r-k}}{k!(r-k)!}}$$

c) ❁ Soient $k \ \mathbb{N}^*$ et $r \ [\![0, k - 1]\!]$. Supposons que l'événement $[N_\theta = r]$ soit réalisé. La loi conditionnelle de C_θ sachant $[N_\theta = r]$ étant la loi binomiale de paramètres r et p, l'événement $[C_\theta = k]$ ne peut donc être réalisé. On a donc :

$$k \ \mathbb{N},\ p(C_\theta = k) = \sum_{r=k}^{+\infty} p([C_\theta = k] \cap [N_\theta = r])$$ donc, d'après le résultat de la question précédente :

$$= \sum_{r=k}^{+\infty} \frac{e^{-\theta}(p\theta)^k (q\theta)^{r-k}}{k!(r-k)!}$$ soit encore :

$$= \frac{e^{-\theta}(p\theta)^k}{k!} \sum_{r=k}^{+\infty} \frac{(q\theta)^{r-k}}{(r-k)!}$$ donc, en effectuant le changement d'indice r' = r - k :

$$= \frac{e^{-\theta}(p\theta)^k}{k!} \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{(q\theta)^{r}}{r!}$$ et donc (série exponentielle) :

$$= \frac{e^{-\theta}(p\theta)^k}{k!} e^{q\theta}$$ soit finalement, comme p = 1 - q :

$$\boxed{k \ \mathbb{N},\ p(C_\theta = k) = \frac{e^{-p\theta}(p\theta)^k}{k!}}$$

❁ On peut alors conclure :

$$\boxed{C_\theta \text{ suit la loi de Poisson de paramètre } p\theta}$$

2) a) D'après le cours, comme C_θ suit la loi de Poisson de paramètre $p\theta$, on a : $E(C_\theta) = p\theta$. Par définition de p, on peut alors conclure :

$$\boxed{E(C_\theta) = \frac{1 - e^{-\alpha\theta}}{\alpha}}$$

b) ❁ Comme $\alpha > 0$, on a : $\lim\limits_{q \to +\infty} e^{-\alpha\theta} = 0$. On peut donc conclure :

$$\boxed{\lim_{q \to +\infty} E(C_\theta) = \frac{1}{\alpha}}$$

❁ Comme : $\theta \ \mathbb{R},\ -e^{-\alpha\theta} < 0$, on peut également conclure :

$$\boxed{\theta \ \mathbb{R},\ E(C_\theta) < \frac{1}{\alpha}}$$