ECRICOME

Banque d'épreuves écrites communes aux concours des Ecoles:
ESC Bordeaux, ESC Marseille-Provence, ESC Reims, ESC Rouen, ICN Nancy

CONCOURS D'ADMISSION 1997

MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures
Option économique

Aucun document n'est autorisé
L'énoncé comporte 7 pages.

Les canditats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

EXERCICE 1

est un réel strictement positif. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n(\alpha) = \frac{n!}{\prod_{k=0}^{n} (\alpha + k)}$$

1. *Étude de la convergence de la suite* $(u_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$

   a. Montrer que la suite $(u_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et convergente. Que peut-on en déduire pour la série de terme général $(u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha))$?
   On note $\ell(\alpha)$ *la limite de la suite* $(u_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$.

   b. On suppose que $\ell(\alpha)$ est non nulle. Démontrer que :

$$u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha\ell(\alpha)}{n}$$

   c. Déduire de ce qui précède que $\ell(\alpha) = 0$.

2. Dans cette question : $\alpha \in]0, 1]$.

   a. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n(\alpha) \geqslant \frac{1}{n+\alpha}$$

   b. Quelle est la nature de la série de terme général $u_n(\alpha)$?

3. On pose, pour tout entier naturel n :

$$I_n(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}(1 - e^{-t})^n \, dt$$

   a. Étudier la convergence de l'intégrale généralisée $I_n(\alpha)$ et calculer $I_0(\alpha)$.

   b. Soit un réel x strictement positif. Intégrer par parties :

$$\int_0^x e^{-\alpha t}(1 - e^{-t})^n \, dt$$

   et en déduire une relation simple entre $I_n(\alpha)$ et $I_{n-1}(\alpha + 1)$, pour tout n entier naturel non nul.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

c. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad I_n(\alpha) = u_n(\alpha)$$

4. *On suppose désormais que* $\alpha > 1$.

a. Montrer que, pour tout N entier naturel :

$$\sum_{n=0}^{N} I_n(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1} - I_{N+1}(\alpha - 1)$$

b. En déduire que la série de terme général $u_n(\alpha)$ est convergente, et donner en fonction de α la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(\alpha)$.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

EXERCICE 2

$M_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.
$M_{3,1}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices colonnes à trois lignes dont les coefficients sont réels.
On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ \frac{3}{2} & -2 & 6 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

où x, y et z sont des nombres réels.
On définit alors une suite de matrices colonnes $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} X_0 \in M_{3,1}(\mathbb{R}) \\ \forall n \in \mathbb{N} \qquad X_{n+1} = AX_n + B \end{cases}$$

1. Montrer que 0, $\dfrac{1}{2}$ et 1 sont les valeurs propres de A, et préciser des vecteurs propres u, v et w qui leur sont respectivement associés.

2. Justifier les affirmations suivantes :
   - Il existe un unique triplet (α, β, γ) de $\mathbb{R}^3$ tel que :
   $$B = \alpha u + \beta v + \gamma w$$
   - Pour tout entier naturel n , il existe un unique triplet $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ de $\mathbb{R}^3$ tel que :
   $$X_n = \alpha_n u + \beta_n v + \gamma_n w$$

3. Établir par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \begin{cases} \alpha_n = \alpha \\ \beta_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (\beta_0 - 2\beta) + 2\beta \\ \gamma_n = \gamma_0 + n\gamma \end{cases}$$

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

4. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites réelles telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

On dit que la suite de matrices colonnes $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si les suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Dans ce cas on écrit :

$$\lim X_n = \begin{pmatrix} \lim a_n \\ \lim b_n \\ \lim c_n \end{pmatrix}$$

a. Prouver que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si le réel γ (introduit en 2.2) est nul.

b. En déduire que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si :

$$3x - 4y + 12z = 0$$

5. On dit que le couple (A, B) admet une position d'équilibre stable si la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la même limite quelle que soit la valeur de X_0.
Expliquer pourquoi, quelle que soit la valeur de B, le couple (A, B) n'admet pas de position d'équilibre stable.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

3. PROBLÈME

)ans tout le problème (qui comporte *deux parties indépendantes*), on suppose que la lurée, exprimée en minutes, d'une communication téléphonique, est une variable aléatoire éelle D qui suit la loi exponentielle de paramètre α.

.1. Comparaison de deux tarifications

'our ses communications, on propose à l'utilisateur d'une ligne téléphonique deux tarifi- ations T_1 et T_2, exprimées en francs, définies de la façon suivante :

- $T_1 = aD$, où a est un nombre réel strictement supérieur à 1, qui représente le prix 'une minute de communication ;
- T_2 est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et, pour tout n entier naturel non nul :

$$\{T_2 = n\} = \{n - 1 < D \leqslant n\}$$

1. Calculer $E(T_1)$ en fonction de a et de α.
2. Déterminer la loi de T_2. De quelle loi s'agit-il ? Exprimer $E(T_2)$ en fonction de α.
3. On pose :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}^{*+} & \varphi(t) = \dfrac{t}{1 - e^{-t}} \\ \varphi(0) = 1 \end{cases}$$

   a. Montrer que φ est une fonction de classe C^1 sur $[0, +\infty[$.

   b. On définit, de plus, la fonction ψ sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \qquad \psi(t) = 1 - (1 + t)e^{-t}$$

   Utiliser cette fonction pour en déduire que φ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$.

l. *Comparaison des tarifications*

   a. Montrer qu'il existe un unique réel α_0 strictement positif tel que $\varphi(\alpha_0) = a$.

   b. Préciser quelle est, en moyenne, la tarification la plus avantageuse suivant la valeur de la durée moyenne d'une communication.

. Pour $a = 1,25$ donner, en utilisant votre calculatrice, une valeur approchée de $\dfrac{1}{\alpha_0}$ (on ne donnera que les deux premières décimales fournies par la calculatrice).

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

3.2. Étude d'un standard téléphonique

Dans toute cette partie, θ est un nombre réel strictement positif représentant un temps exprimé en minutes. Un standard téléphonique de capacité illimitée reçoit des communications téléphoniques entre l'instant 0 et l'instant θ inclus.

3.2.1. Cas d'une seule communication

On désigne par n un entier naturel non nul. L'instant où débute la communication est une variable aléatoire réelle I_n telle que :

$$\begin{cases} I_n(\Omega) = \left\{\dfrac{\theta}{n}, \dfrac{2\theta}{n}, \ldots, \dfrac{(n-1)\theta}{n}, \theta\right\} \\ \forall k \in [1,n]_{\mathbf{N}} \qquad P\left(I_n = \dfrac{k\theta}{n}\right) = \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

où P désigne la probabilité. De plus, I_n et D (la durée aléatoire de la communication), sont indépendantes.

1. Pour tout réel positif t, rappeler quelle est l'expression de $P(D > t)$ en fonction de t et de α.
2. En déduire, pour k élément de $[1,n]_{\mathbf{N}}$, la probabilité conditionnelle de $\{D + I_n > \theta\}$ sachant $\left\{I_n = \dfrac{k\theta}{n}\right\}$.
3. Démontrer l'égalité suivante :

$$P(D + I_n > \theta) = \frac{1}{n}\left(\frac{1 - e^{-\alpha\theta}}{1 - e^{-\frac{\alpha\theta}{n}}}\right)$$

4. Déterminer :

$$\lim_{n \to +\infty} P(D + I_n > \theta)$$

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

2.2. Étude de l'encombrement du standard à l'instant θ

ıns cette partie on définit les nombres réels p et q par :

$$p = \frac{1 - e^{-\alpha\theta}}{\alpha\theta} \qquad \text{et} \qquad q = 1 - p$$

suppose désormais que la probabilité qu'une communication reçue dans l'intervalle de ıps $[0, \theta]$ se poursuive au-delà de l'instant θ est égale à p.
note N_θ la variable aléatoire réelle égale au nombre de communications reçues dans tervalle de temps $[0, \theta]$ et l'on suppose que N_θ suit une loi de Poisson de paramètre θ.
note C_θ la variable aléatoire réelle égale au nombre de communications reçues dans tervalle de temps $[0, \theta]$ qui se poursuivent au-delà de l'instant θ.
instants aléatoires où les communications se terminent sont mutuellement indépendants.

.. *Loi de probabilité de C_θ*

a. Soit r un entier naturel. Quelle est la loi conditionnelle de C_θ sachant que $\{N_\theta = r\}$?

b. Démontrer que l'on a :

$$\forall r \in \mathbb{N} \qquad \forall k \in [0, r]_{\mathbb{N}} \qquad P\left[\{C_\theta = k\} \cap \{N_\theta = r\}\right] = \frac{e^{-\theta}(p\theta)^k (q\theta)^{r-k}}{k!(r-k)!}$$

c. En déduire, pour tout entier naturel k, une expression simple de $P(C_\theta = k)$ en fonction de k, p et θ. Quelle est la loi de probabilité de C_θ ?

Étude de l'espérance de C_θ

a. Déterminer l'expression de $E(C_\theta)$ en fonction de θ et de α.

b. Quelle est la limite de $E(C_\theta)$ lorsque θ tend vers $+\infty$? Vérifier qu'elle majore $E(C_\theta)$.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

ECRICOME 1997 Voie Eco

Exercice 1

Exercice 1

1) a) • Comme α est strictement positif, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n(\alpha) > 0$. On peut alors écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}(\alpha)}{u_n(\alpha)} = \frac{(n+1)!}{\prod_{k=0}^{n+1}(\alpha+k)} \times \frac{\prod_{k=0}^{n}(\alpha+k)}{n!} \qquad \text{donc :}$$

$$= \frac{n+1}{n+1+\alpha} \qquad \text{d'où, comme } \alpha > 0 :$$

$$< 1.$$

La suite $(u_n(\alpha))_{n \in \mathbb{N}}$ étant positive, on peut donc conclure :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n(\alpha))_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$$

• La suite $(u_n(\alpha))_{n \in \mathbb{N}}$ étant décroissante et minorée (par 0), on peut également conclure :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n(\alpha))_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge}}$$

• On a :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} (u_k(a) - u_{k+1}(a)) = u_0(\alpha) - u_{n+1}(\alpha)$, les termes s'annulant deux à deux.

Comme la suite $(u_n(\alpha))_{n \in \mathbb{N}}$ converge, on peut donc écrire que la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} (u_k(a) - u_{k+1}(a))\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, et l'on peut donc conclure :

$$\boxed{\text{La série de terme général } u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha) \text{ converge}}$$

b) Supposons que $\ell(\alpha)$ soit non nulle.

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha) = u_n(\alpha)\left(1 - \frac{n+1}{n+\alpha+1}\right) \qquad \text{soit encore :}$$

$$= \frac{\alpha u_n(\alpha)}{n+\alpha+1}.$$

 Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

ECRICOME 1997 Voie Eco

Exercice 1

Ainsi, on a : $u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha) \sim \frac{\alpha u_n(\alpha)}{n}$. De plus, comme $\ell(\alpha) \neq 0$, on a : $u_n(\alpha) \sim \ell(\alpha)$, et l'on peut conclure :

$$\boxed{u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha) \sim \frac{\alpha \ell(\alpha)}{n}}$$

c) Comme $\ell(\alpha) \neq 0$ et $\alpha \neq 0$, la série de terme général $\frac{\alpha \ell(\alpha)}{n}$ est divergente. D'après les critères de comparaison des séries à termes positifs, on peut alors écrire, d'après le résultat de la question précédente, que la série de terme général $u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha)$ diverge. Il y a donc contradiction avec le résultat de la question 1a. On peut donc conclure :

$$\boxed{\ell(\alpha) = 0}$$

2) a) On a :

$n \in \mathbb{N}$, $u_n(\alpha) = \dfrac{n!}{\prod_{k=0}^{n} (\alpha + k)}$ soit encore :

$$= \frac{1}{n+\alpha} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{k+1}{k+\alpha}$$ soit finalement, comme $\alpha \in]0,1]$: $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\frac{k+1}{k+\alpha} \geq 1$

$$\boxed{n \in \mathbb{N},\ u_n(\alpha) \geq \frac{1}{n+\alpha}}$$

b) Comme la série de terme général $\frac{1}{n+\alpha}$ diverge, on peut alors conclure, d'après les critères de comparaison des séries à termes positifs :

$$\boxed{\text{La série de terme général } u_n(\alpha) \text{ diverge}}$$

3) a) ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto e^{-\alpha t}(1 - e^{-t})^n$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. De plus, on a : $\lim_{t \to +\infty} t^2 e^{-xt}(1 - e^{-t})^n = 0$ (croissances comparées). Par définition de la limite, on peut donc écrire, cette fonction étant positive sur $\mathbb{R}^+$:

$t_0 \in \mathbb{R}_+^*$, $t \geq t_0$, $0 \leq t^2 e^{-\alpha t}(1 - e^{-t})^n \leq 1$ donc, comme : $t \geq t_0$, $t^2 > 0$:

$t_0 \in \mathbb{R}_+^*$, $t \geq t_0$, $0 \leq e^{-\alpha t}(1 - e^{-t})^n \leq \frac{1}{t^2}$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

ECRICOME 1997 Voie Eco

Exercice 1

Comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge, on peut donc écrire, d'après les théorèmes de comparaison des intégrales de fonctions positives que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}(1-e^{-t})^n dt$ converge. On peut alors conclure :

Pour tout n $\in \mathbb{N}$, l'intégrale définissant $I_n(\alpha)$ converge

- On a :

$x \in \mathbb{R}^+$, $\int_0^x e^{-\alpha t} dt = \left[\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha}\right]_0^x$ soit :

$= \frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha x})$.

Comme $\lim_{x \to +\infty} e^{-\alpha x} = 0$ (car $\alpha > 0$), on en déduit alors, par passage à la limite, que $\lim_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-\alpha t} dt = \frac{1}{\alpha}$, et donc que :

$$I_0(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$$

b) - Soit n $\in \mathbb{N}^*$. Les fonctions $t \mapsto -\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha}$ et $t \mapsto (1 - e^{-t})^n$ étant de classe C^1 sur $[0, x]$ $(x > 0)$, on obtient, à l'aide d'une intégration par parties (on intègre la fonction $t \mapsto e^{-\alpha t}$ et on dérive la fonction $t \mapsto (1 - e^{-t})^n$) :

$\int_0^x e^{-\alpha t}(1-e^{-t})^n dt = \left[\frac{e^{-\alpha t}(1-e^{-t})}{\alpha}\right]_0^x + \frac{n}{\alpha}\int_0^x e^{-\alpha t}e^{-t}(1-e^{-t})^{n-1} dt$ d'où :

$$n \in N^*, \int_0^x e^{-\alpha t}(1-e^{-t})^n dt = -\frac{e^{-\alpha x}(1-e^{-x})}{\alpha} + \frac{n}{\alpha}\int_0^x e^{-\alpha t}e^{-t}(1-e^{-t})^{n-1} dt$$

- On a : $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-\alpha x}(1-e^{-x})^n}{\alpha} = 0$, et d'après la question 3a, pour n $\in \mathbb{N}$ et α strictement positif, $I_n(\alpha)$ existe donc, en faisant tendre x vers $+\infty$ dans l'égalité précédente :

$$n \in N^*, I_n(\alpha) = \frac{n}{\alpha} I_{n-1}(\alpha + 1)$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

ECRICOME 1997 Voie Eco

Exercice 1

c) On a :

$n \in \mathbb{N}^*, u_n(\alpha) = \dfrac{n!}{\prod_{k=0}^{n}(\alpha+k)}$ d'où :

$= \dfrac{n}{\alpha} \times \dfrac{(n-1)!}{\prod_{k=1}^{n}(\alpha+k)}$ soit encore, en effectuant le changement d'indice k'=k-1 :

$= \dfrac{n}{\alpha} \times \dfrac{(n-1)!}{\prod_{k=0}^{n-1}(\alpha+1+k)}$ d'où :

$= \dfrac{n}{\alpha}\, u_{n-1}(\alpha+1).$

Les suites $(I_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n(\alpha))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient donc la même relation de récurrence. Comme $u_0(\alpha) = I_0(\alpha)$, on peut donc conclure :

$$\boxed{n \in \mathbb{N},\ I_n(\alpha) = u_n(\alpha)}$$

4) a) On a :

$N \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^{N} I_n(\alpha) = \sum_{n=0}^{N} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}(1-e^{-t})^n dt$ donc, par linéarité de l'intégration, les intégrales en présence étant convergentes :

$= \int_0^{+\infty} \left(e^{-\alpha t} \sum_{n=0}^{N} (1-e^{-t})^n\right) dt$ d'où, en reconnaissant la somme des termes d'une suite géométrique de raison $1 - e^{-t} \neq 1$ $(t \geq 0)$:

$= \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} \dfrac{1-(1-e^{-t})^{N+1}}{e^{-t}} dt$ soit encore :

$= \int_0^{+\infty} \left(e^{-(\alpha-1)t} - e^{-\alpha t}(1-e^{-t})^{N+1}\right) dt$ donc, par linéarité de l'intégration, les intégrales en présence étant convergentes $(\alpha > 1)$:

$= \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha-1)t} dt - \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}(1-e^{-t})^{N+1} dt$ soit finalement :

$= I_0(\alpha - 1) - I_{N+1}(\alpha - 1).$

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

D'après le résultat de la question 3a, on peut finalement conclure :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{n=0}^{N} I_n(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1} - I_{N+1}(\alpha - 1)$$

b) D'après le résultat de la question 3c, on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{n=0}^{N} u_n(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1} - u_{N+1}(\alpha - 1).$$

Comme d'après la question 1.c, la suite $(u_n(\alpha))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, on peut donc écrire que la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k(\alpha)\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\frac{1}{\alpha + 1}$, et l'on peut donc conclure :

La série de terme général $u_n(\alpha)$ converge, de somme $\frac{1}{\alpha + 1}$

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

ECRICOME 1997 Voie Eco

Exercice 2

Exercice 2

1) • 0 est valeur propre de A si, et seulement si, il existe un vecteur X non nul de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que AX = 0. Or, on a :

$$AX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -\frac{3}{2} & -2 & 6 \\ -\frac{1}{2} & -1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix} X = 0 \qquad \text{donc } (L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1,\ L_3 \leftarrow 2L_3 - L_1) :$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} X = 0 \qquad \text{soit encore } (L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2) :$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0 \qquad \text{d'où, en posant } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} :$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z = 0 \\ -4y + 6z = 0 \end{cases} \qquad \text{et donc :}$$

$$\Leftrightarrow X \in Vect\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

On peut donc conclure :

> 0 est valeur propre de A, de sous-espace propre associé $E_0 = Vect(u)$ avec $u = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

• $\frac{1}{2}$ est valeur propre de A si, et seulement si, il existe un vecteur X non nul de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $\left(A - \frac{1}{2}I\right)X = 0$. Or, on a :

$$\left(A - \frac{1}{2}I\right)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & 6 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 2 \end{pmatrix} X = 0 \qquad \text{donc } (L_2 \leftarrow 2L_2 - 6L_1,\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1) :$$

Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE
© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

ECRICOME 1997 Voie Eco

Exercice 2

$$\left(A - \frac{1}{2}I\right)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} X = 0 \qquad \text{d'où, en posant } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} :$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x + 2z = 0 \\ -5y = 0 \end{cases} \qquad \text{et donc :}$$

$$\Leftrightarrow X \in Vect\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On peut donc conclure :

$\frac{1}{2}$ est valeur propre de A, de sous-espace propre associé $E_{1/2} = Vect(v)$ avec $v = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

• 1 est valeur propre de A si, et seulement si, il existe un vecteur X non nul de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que (A - I)X = 0. Or, on a :

$$(A - I)X = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & 6 \\ -1 & -1 & 3 \\ \frac{1}{2} & & \frac{3}{2} \end{pmatrix} X = 0 \qquad \text{donc } (L_3 \leftarrow 6L_3 - 2L_2) :$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} X = 0 \qquad \text{d'où, en posant } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} :$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ \frac{3}{2}x - 3y + 6z = 0 \end{cases} \qquad \text{et donc :}$$

$$\Leftrightarrow X \in Vect\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On peut donc conclure :

1 est valeur propre de A, de sous-espace propre associé $E_1 = Vect(w)$ avec $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

ECRICOME 1997 Voie Eco

Exercice 2

2) • u, v et w étant des vecteurs propres de A associés à des valeurs propres différentes, la famille (u, v, w) est libre. Comme elle comporte trois vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et comme $\dim \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) = 3$, elle forme donc une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Comme B $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on peut donc conclure :

Il existe un unique triplet (α, β, γ) de réels tel que $B = \alpha u + \beta v + \gamma w$

• De même, comme, pour tout n $\mathbb{N}$, X_n $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on peut conclure :

Pour tout n $\mathbb{N}$, l existe un unique triplet $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n)$ de réels tel que $X_n = \alpha_n u + \beta_n v + \gamma_n w$

3) Montrons par récurrence que : n $\mathbb{N}^*$, $\begin{cases} \alpha_n = \alpha \\ \beta_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (\beta_0 - \beta_n) + 2\beta. \\ \gamma_n = \gamma_0 + n\gamma \end{cases}$

• Au rang n = 1. On a :

$X_1 = AX_0 + B$ donc :

$= A(\alpha_0 u + \beta_0 v + \gamma_0 w) + \alpha u + \beta v + \gamma w$ soit encore :

$= \alpha_0 Au + \beta_0 Av + \gamma_0 Aw + \alpha u + \beta v + \gamma w$ donc, par définition de u, v, w :

$= \alpha u + \left(\frac{1}{2}(\beta_0 - 2\beta) + 2\beta\right) v + (\gamma_0 + \gamma) w$ donc, par unicité des coefficients $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$:

$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha \\ \beta_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^1 (\beta_0 - \beta_1) + 2\beta. \\ \gamma_1 = \gamma_0 + \gamma \end{cases}$

La propriété est donc bien vérifiée au rang n = 1.

• Soit n $\mathbb{N}^*$. Supposons que $\begin{cases} \alpha_n = \alpha \\ \beta_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (\beta_0 - \beta_n) + 2\beta. \\ \gamma_n = \gamma_0 + n\gamma \end{cases}$ On a :

$X_{n+1} = AX_n + B$ donc d'après la question 2. :

$= A(\alpha_n u + \beta_n v + \gamma_n w) + \alpha u + \beta v + \gamma w$ soit encore :

Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE
© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

ECRICOME 1997 Voie Eco

Exercice 2

$X_{n+1} = \alpha_n Au + \beta_n Av + \gamma_n Aw + \alpha u + \beta v + \gamma w$ donc, par définition de u, v, w :

$= \alpha u + \left(\frac{1}{2}\beta_n + \beta\right) v + (\gamma_n + \gamma) w$ donc, par unicité des coefficients

$(\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}, \gamma_{n+1})$:

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = \alpha \\ \beta_{n+1} = \frac{1}{2}\beta_n + \beta \\ \gamma_{n+1} = \gamma_n + \gamma \end{cases}$$ d'où, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\begin{cases} \alpha_{n+1} = \alpha \\ \beta_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (\beta_0 - \beta_{n+1}) + 2\beta. \\ \gamma_{n+1} = \gamma_0 + (n+1)\gamma \end{cases}$$

Si la propriété est vérifiée au rang n, elle l'est donc également au rang n + 1.

• On peut finalement conclure :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} \alpha_n = \alpha \\ \beta_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (\beta_0 - \beta_n) + 2\beta \\ \gamma_n = \gamma_0 + n\gamma \end{cases}$$

4) a) (u, v, w) étant une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A, on peut écrire, en notant P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à la base (u, v, w) :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$$ donc, comme $P = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$:

$$= \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix}$$ d'où :

$$= \begin{pmatrix} -4(\alpha_n + \beta_n) + 2\gamma_n \\ 3\alpha_n + \gamma_n \\ 2\alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, les suites $\left(-4(\alpha_n + \beta_n) + 2\gamma_n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(3\alpha_n + \gamma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(2\alpha_n + \beta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent.

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

ECRICOME 1997 Voie Eco

Exercice 2

Or, d'après le résultat de la question précédente, on peut écrire que les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent (respectivement vers α et 2β). Ainsi, la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Supposons alors que γ ne soit pas nul. D'après le résultat de la question précédente, on peut alors écrire que la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a une limite infinie. On peut finalement conclure.

La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, le réel γ est nul

b) (x, y, z) et (α, β, γ) étant les coordonnées respectives de la matrice B dans la base canonique et dans la base (u, v, w) de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \qquad \text{d'où :}$$

$$= \begin{pmatrix} -4(\alpha+\beta)+2\gamma \\ 3\alpha+\gamma \\ 2\alpha+\beta \end{pmatrix} \qquad \text{soit encore :}$$

$$\begin{cases} -4\alpha - 4\beta + 2\gamma = x \\ 3\alpha + \gamma = y \\ 2\alpha + \beta = z \end{cases} \qquad \text{donc :}$$

$$\begin{cases} -\frac{4}{3}(y-\gamma) - 4z + \frac{8}{3}(y-\gamma) + 2\gamma = x \\ \alpha = \frac{1}{3}(y-\gamma) \\ \alpha = z - 2\alpha \end{cases} \qquad \text{d'où :}$$

$-4y + 4\gamma - 12z + 8y - 8\gamma + 2\gamma = 3x$ soit finalement :

$$\gamma = \frac{3x - 4y + 12z}{2}.$$

On peut finalement conclure :

La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si $3x - 4y + 12z = 0$

5) Supposons que la matrice B vérifie la condition nécessaire et suffisante de convergence de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dans ce cas, les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent respectivement vers α, 2β et γ_0.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

ECRICOME 1997 Voie Eco

Exercice 2

Ainsi, en considérant l'expression des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ déterminée dans la question 4a, on peut écrire que la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice $\begin{pmatrix} 4(\alpha+\beta)+2\gamma \\ 3\alpha+\gamma \\ 2\alpha+\beta \end{pmatrix}$. Cette limite dépend donc de la valeur de X_0, et ce quelle que soit la matrice B choisie. On peut donc conclure :

Quelle que soit la valeur de B, le couple (A, B) n'admet pas de position d'équilibre stable

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

ECRICOME 1997 Voie Eco

Problème

Problème

3.1. Comparaison de deux tarifications

1) Comme $T_1 = aD$, on peut écrire, par linéarité de l'espérance : $E(T_1) = aE(D)$. Comme D suit une loi exponentielle de paramètre α, on peut donc conclure :

$$\boxed{E(T_1) = \frac{a}{a}}$$

2) ⋆ Par définition de T_2, on a $T_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$, et :

$n \in \mathbb{N}^*$, $p(T_2 = n) = p(n - 1 < D \leq n)$ donc, comme D suit une loi exponentelle de paramètre α :

$= \int_{n-1}^{n} \alpha e^{-\alpha t} dt$ i.e. :

$= \left[-e^{-at} \right]_{n-1}^{n}$ d'où :

$= -e^{-\alpha n} + e^{-\alpha(n-1)}$ soit finalement :

$= e^{-\alpha(n-1)}(1 - e^{-\alpha})$.

On peut finalement conclure :

$$\boxed{T_2 \text{ suit la loi géométrique de paramètre } 1 - e^{-\alpha}}$$

⋆ On peut également conclure :

$$\boxed{E(T_2) = \frac{1}{1 - e^{-\alpha}}}$$

3) a) ⋆ ϕ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient, dont le dénominateur ne s'annule pas, de fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

⋆ De plus, d'après les équivalents de référence, on peut écrire :

$\phi(t) \underset{0}{\sim} \frac{t}{t}$ d'où :

$\lim_{t \to 0} \phi(t) = 1$.

Comme $\phi(0) = 1$, ϕ est donc continue sur $\mathbb{R}^+$.

Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE
© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

- Enfin, on a :

$t \in \mathbb{R}_+^*, \phi'(t) = \dfrac{1 - e^{-t} - te^{-t}}{(1-e^{-t})^2}$ soit encore :

$= \dfrac{1 - (1+t)e^{-t}}{(1-e^{-t})^2}$.

Or, à l'aide d'un développement limité de la fonction exponentielle à l'ordre 2 au voisinage de 0, on peut écrire qu'il existe une fonction ε de limite nulle en 0 telle que :

$e^{-t} = 1 - t + \dfrac{t^2}{2} + t^2\varepsilon(t)$ donc il existe une fonction ε_1 de limite nulle en 0 telle que :

$(1+t)e^{-t} = 1 - \dfrac{t^2}{2} + t^2\varepsilon_1(t)$ d'où :

$1 - (1+t)e^{-t} = \dfrac{t^2}{2} - t^2\varepsilon_1(t)$ et donc :

$1 - (1+t)e^{-t} \underset{0}{\sim} \dfrac{t^2}{2}$ d'où, comme $1 - e^{-t} \underset{0}{\sim} t$:

$\phi'(t) \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{2}$.

Ainsi, ϕ' admet une limite finie en 0. Comme ϕ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut donc conclure, d'après le théorème de prolongement des fonctions de classe C^1 :

ϕ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$

b) D'après l'expression de ϕ' déterminée à la question précédente, on peut écrire que ϕ' est du signe de ψ sur $\mathbb{R}_+^*$. Or, ψ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme somme et produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^+$, et on a :

$t \in \mathbb{R}^+, \psi'(t) = -e^{-t} + (1+t)e^{-t}$ soit :

$= te^{-t}$ d'où :

$t \in \mathbb{R}_+^*, \psi'(t) > 0$.

Ainsi, ψ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. On a donc :

$t \in \mathbb{R}_+^*, \psi(t) > \psi(0)$ soit :

> 0.

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Ainsi, ψ, donc ϕ', est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. ϕ est donc continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Comme $\phi(0) = 1$ et $\lim_{t \to +\infty} \phi(t) = +\infty$, on peut finalement conclure, d'après le théorème de la bijection :

ϕ réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $[1, +\infty[$

4) a) D'après le résultat de la question précédente, on peut donc conclure, comme $a > 1$:

Il existe un unique réel α_0 strictement positif tel que $\phi(\alpha_0) = a$

b) D'après le résultat des questions 1 et 2, on peut écrire :

$E(T_1) < E(T_2) \Leftrightarrow \frac{a}{a} < \frac{1}{1 - e^{-\alpha}}$ soit encore, comme $\alpha > 0$:

$\Leftrightarrow a < \frac{\alpha}{1 - e^{-\alpha}}$ donc, d'après le résultat de la question précédente :

$\Leftrightarrow \phi(\alpha_0) < \phi(\alpha)$ d'où, ϕ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$:

$\Leftrightarrow \alpha_0 < \alpha$ donc, en composant par la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$, strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{\alpha_0}$.

Or, comme D suit la loi exponentielle de paramètre α, la durée moyenne de communication (ou espérance de D) est égale à $\frac{1}{\alpha}$. On peut donc conclure :

La tarification T_2 est plus avantageuse que la tarification T_1 si, et seulement si, la durée moyenne de communication est inférieure à $\frac{1}{\alpha_0}$.

5) Dans le cas où $a = 1{,}25$, on peut conclure, en procédant par dichotomie à l'aide d'une calculatrice :

$\frac{1}{\alpha_0} = 2{,}15$

3.2. Etude d'un standard téléphonique

3.2.1. Cas d'une seule communication

1) On a :

$t \in \mathbb{R}^+$, $p(D > t) = 1 - p(D \leq t)$ donc, comme D suit une loi exponentielle de paramètre α :

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

ECRICOME 1997 Voie Eco

Problème

$t \in \mathbb{R}^+$, $p(D > t) = 1 - \int_0^t a e^{-au} du$ i.e. :

$= 1 - \left[-e^{-au} \right]_0^t$ d'où :

$$t \in \mathbb{R}^+, \; p(D > t) = e^{-\alpha t}$$

2) On a :

$k \in [\![1, n]\!]$, $p_{\left(D+I_n > \theta / I_n = \frac{k\theta}{n}\right)} = p\left(D > \theta - \frac{k\theta}{n}\right)$ soit encore :

$= p\left(D > \frac{\theta(n-k)}{n}\right)$ donc, d'après le résultat précédent :

$$k \in [\![1, n]\!], \; p_{\left(D+I_n > \theta / I_n = \frac{k\theta}{n}\right)} = e^{-\alpha \frac{\theta(n-k)}{n}}$$

3) La famille $\left(I_n = \frac{k\theta}{n}\right)_{1 \le k \le n}$ constituant un système complet d'événements de probabilités non nulles, on peut écrire, d'après la formule des probabilités totales :

$p(D + I_n > \theta) = \sum_{k=1}^{n} p\left(I_n = \frac{k\theta}{n}\right) p_{\left(I_n = \frac{k\theta}{n}\right)}\left(D + I_n > \theta\right) = \sum_{k=1}^{n} p\left(I_n = \frac{k\theta}{n}\right) p_{\left(D+I_n > \theta / I_n = \frac{k\theta}{n}\right)}$ donc, d'après la loi de I_n et le résultat précédent :

$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{-\alpha \frac{\theta(n-k)}{n}}$ d'où :

$= \frac{e^{-\alpha\theta}}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(e^{\alpha\theta/n}\right)^k$

Or, comme $\alpha\theta > 0$, on a : $e^{\alpha\frac{\theta}{n}} \neq 1$. Ainsi, en reconnaissant la somme des termes d'une suite géométrique de raison $e^{\alpha\frac{\theta}{n}}$, on peut écrire :

$$p(D + I_n > \theta) = \frac{e^{-\alpha\theta}}{n} \times e^{\alpha\frac{\theta}{n}} \times \frac{1 - \left(e^{\alpha\frac{\theta}{n}}\right)^n}{1 - e^{\alpha\frac{\theta}{n}}}.$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Comme $e^{\alpha\frac{\theta}{n}} = \frac{1}{e^{-\alpha\frac{\theta}{n}}}$, et comme $\left(e^{\alpha\theta/n}\right)^n = e^{\alpha\theta}$, on peut finalement conclure :

$$p(D + I_n > \theta) = \frac{1}{n}\left(\frac{1 - e^{-\alpha\theta}}{1 - e^{-\alpha\frac{\theta}{n}}}\right)$$

4) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha\frac{\theta}{n} = 0$, on a : $1 - e^{-\alpha\frac{\theta}{n}} \underset{0}{\sim} \alpha\frac{\theta}{n}$. D'après le résultat de la question précédente, on peut donc écrire :

$p(D + I_n > \theta) \underset{0}{\sim} \frac{1}{\alpha\theta}(1 - e^{-\alpha\theta})$.

On peut alors conclure :

$$\lim_{n\to+\infty} p(D + I_n > \theta) = \frac{1 - e^{-\alpha\theta}}{\alpha\theta}$$

3.2.2. Etude de l'encombrement du standard à l'instant θ

1) a) Sachant que l'événement $[N_\theta = r]$ est réalisé, la variable aléatoire C_θ est égale au nombre de succès (une communication se poursuit au delà de l'instant θ) dans une suite de r épreuves indépendantes (les instants aléatoires où les communications se terminent étant mutuellement indépendants) à deux issues (une communication donnée se poursuit ou non au delà de l'instant θ) de même probabilité de succès p. On peut donc conclure :

La loi conditionnelle de C_θ conditionnée par l'événement $[N_\theta = r]$ est la loi binomiale de paramètres r et p.

b) On a :

$r \in \mathbb{N}$, $k \in [\![0, r]\!]$, $p\left([C_\theta = k] \cap [N_\theta = r]\right) = p(N_\theta = r)\, p_{[N_\theta = r]}(C_\theta = k)$ donc, comme N_θ suit la loi de Poisson de paramètre θ et d'après le résultat de la question précédente :

$$= \frac{e^{-\theta}\theta^r}{r!} \times C_r^k\, p^k\, q^{r-k}$$ soit finalement :

$$r \in \mathbb{N},\quad k \in [\![0, r]\!],\quad p\left([C_\theta = k] \cap [N_\theta = r]\right) = \frac{e^{-\theta}(p\theta)^k(q\theta)^{r-k}}{k!(r-k)!}$$

Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE
© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

c) ⋆ Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $r \in [\![0, k-1]\!]$. Supposons que l'événement $[N_\theta = r]$ soit réalisé. La loi conditionnelle de C_θ sachant $[N_\theta = r]$ étant la loi binomiale de paramètres r et p, l'événement $[C_\theta = k]$ ne peut donc être réalisé. On a donc :

$k \in \mathbb{N}$, $p(C_\theta = k) = \sum_{r=k}^{+\infty} p([C_\theta = k] \cap [N_\theta = r])$ donc, d'après le résultat de la question précédente :

$= \sum_{r=k}^{+\infty} \frac{e^{-\theta}(p\theta)^k (q\theta)^{r-k}}{k!(r-k)!}$ soit encore :

$= \frac{e^{-\theta}(p\theta)^k}{k!} \sum_{r=k}^{+\infty} \frac{(q\theta)^{r-k}}{(r-k)!}$ donc, en effectuant le changement d'indice r' = r - k :

$= \frac{e^{-\theta}(p\theta)^k}{k!} \sum_{r=0}^{+\infty} \frac{(q\theta)^r}{r!}$ et donc (série exponentielle) :

$= \frac{e^{-\theta}(p\theta)^k}{k!} e^{q\theta}$ soit finalement, comme p = 1 - q :

$$\boxed{k \in \mathbb{N},\ p(C_\theta = k) = \frac{e^{-p\theta}(p\theta)^k}{k!}}$$

⋆ On peut alors conclure :

$$\boxed{C_\theta \text{ suit la loi de Poisson de paramètre } p\theta}$$

2) a) D'après le cours, comme C_θ suit la loi de Poisson de paramètre $p\theta$, on a : $E(C_\theta) = p\theta$. Par définition de p, on peut alors conclure :

$$\boxed{E(C_\theta) = \frac{1 - e^{-\alpha\theta}}{\alpha}}$$

b) ⋆ Comme $\alpha > 0$, on a : $\lim_{q \to +\infty} e^{-\alpha\theta} = 0$. On peut donc conclure :

$$\boxed{\lim_{q \to +\infty} E(C_\theta) = \frac{1}{\alpha}}$$

⋆ Comme : $\theta \in \mathbb{R}$, $-e^{-\alpha\theta} < 0$, on peut également conclure :

$$\boxed{\theta \in \mathbb{R},\ E(C_\theta) < \frac{1}{\alpha}}$$

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021