Monotonie et nature

Enoncés

1/ Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \prod_{k=1}^{n} u_k \end{cases}$$

a)Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n>1$$

b) Etudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2/ Etudier la monotonie de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} v_0\in\mathbb{R} \\ \forall n\in\mathbb{N},\ v_{n+1} = 5 + 12v_n^{10} + v_n \end{cases}$$

3) a) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que : $\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n)=\alpha$ où α désigne un réel non nul. Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive telle que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α ($\alpha\neq1$). Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone à partir d'un certain rang. En déduire sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE
© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Correction

1/ a) Montrons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n>1$

- Au rang n=1 Comme $u_1=2$, la proposition est vérifiée.
- Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Supposons que : $\forall k\in[\![1,n]\!]$, $u_k>1$

Par multiplication d'inégalités dont les termes sont positifs, on peut alors écrire :

$\prod_{k=1}^{n} u_k > 1$ d'où :

$u_{n+1}>1$

Ainsi, si la proposition est vérifiée jusqu'au rang n, elle l'est également au rang n+1.

- On peut finalement conclure :

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n>1$

b) Comme : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n>0$, on peut écrire :

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\prod_{k=1}^{n} u_k}{u_n}$ donc :

$\forall n\in[\![2,+\infty[\![$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \prod_{k=1}^{n-1} u_k$ d'où :

$\forall n\in[\![2,+\infty[\![$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.

La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant à termes strictement positifs et comme $u_2=u_1$, on peut finalement conclure :

La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante

2/ On a :

$\forall n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = 12\,v_n^{10} + 5$ donc, comme $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n^{10}\geq 0$:

Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE
© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

$\forall n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n \geq 0$ d'où :

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

3/ a) Supposons que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite réelle ℓ Dans ce cas, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \text{ d'où :}$$

$$\lim_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$$

Comme $\alpha\neq 0$, il y a donc contradiction, et l'on peut donc conclure :

La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

b) La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant à termes strictement positifs, il en est de même de la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, donc d'après le théorème de prolongement des inégalités, on a : $\alpha\geq 0$.

Deux cas se présentent alors :

- Si $\alpha\in[0,1[$. Dans ce cas, on peut écrire, en conséquence de la définition de la limite :

$\exists n_0\in\mathbb{N}$, $\forall n\geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ d'où, comme $\forall n\geq n_0$, $u_n>0$:

$\forall n\geq n_0$, $u_{n+1}\leq u_n$

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang. Etant positive, elle converge donc vers une limite positive ou nulle, notée ℓ.

Supposons que $\ell\neq 0$. On a alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \frac{\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}}{\lim_{n\to+\infty} u_n} \quad \text{donc :}$$

$$= \frac{\ell}{\ell} \quad \text{i.e. :}$$

Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE
© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

$= 1$

Comme $\alpha \neq 1$, il y a donc contradiction, ce qui nous permet d'écrire $\ell = 0$.

- Si $\alpha \in]1,+\infty[$. Dans ce cas, on peut écrire, en conséquence de la définition de la limite :

$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ donc comme $\forall n \geq n_0, u_n > 0$:

$\forall n \geq n_0, u_{n+1} \geq u_n$

Ainsi la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante à partir d'un certain rang et admet donc une limite, finie ou infinie (et dans ce cas celle-ci est $+\infty$).

Or de même que précédemment, la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut converger que vers 0 ce qui, cette suite étant croissante et avec $u_0 > 0$, est impossible et nous permet donc d'écrire qu'elle diverge vers $+\infty$.

On peut finalement conclure :

La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante (resp. croissante) à partir d'un certain rang si $\alpha \in]0,1[$ (resp. si $\alpha \in]1,+\infty[$) et converge (resp. diverge) vers 0 (resp. $+\infty$)

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021