

Monotonie et nature

Enoncés

1/ Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \prod_{k=1}^n u_k \end{cases}$$

a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 1$$

b) Etudier la monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

2/ Etudier la monotonie de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} v_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 5 + 12v_n^{10} + v_n \end{cases}$$

3) a) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = \alpha$ où α désigne un réel non nul. Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

b) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement positive telle que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α ($\alpha \neq 1$). Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone à partir d'un certain rang. En déduire sa limite quand n tend vers $+\infty$.

Correction

1/ a) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 1$

- Au rang $n=1$ Comme $u_1=2$, la proposition est vérifiée.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, u_k > 1$

Par multiplication d'inégalités dont les termes sont positifs, on peut alors écrire :

$$\prod_{k=1}^n u_k > 1 \text{ d'où :}$$

$$u_{n+1} > 1$$

Ainsi, si la proposition est vérifiée jusqu'au rang n , elle l'est également au rang $n+1$.

- On peut finalement conclure :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 1$$

b) Comme : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$, on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\prod_{k=1}^n u_k}{u_n} \text{ donc :}$$

$$\forall n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \prod_{k=1}^{n-1} u_k \text{ d'où :}$$

$$\forall n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket, \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1.$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant à termes strictement positifs et comme $u_2 = u_1$, on peut finalement conclure :

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante

2/ On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = 12v_n^{10} + 5 \text{ donc, comme } \forall n \in \mathbb{N}, v_n^{10} \geq 0 :$$

$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n \geq 0$ d'où :

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante

3/ a) Supposons que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite réelle ℓ . Dans ce cas, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \text{ d'où :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$$

Comme $\alpha \neq 0$, il y a donc contradiction, et l'on peut donc conclure :

La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

b) La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant à termes strictement positifs, il en est de même de la suite

$\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$, donc d'après le théorème de prolongement des inégalités, on a : $\alpha \geq 0$.

Deux cas se présentent alors :

- Si $\alpha \in [0, 1[$. Dans ce cas, on peut écrire, en conséquence de la définition de la limite :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 \quad \text{d'où, comme } \forall n \geq n_0, u_n > 0 :$$

$$\forall n \geq n_0, u_{n+1} \leq u_n$$

Ainsi, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante à partir d'un certain rang. Etant positive, elle converge donc vers une limite positive ou nulle, notée ℓ .

Supposons que $\ell \neq 0$. On a alors :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) &= \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}}{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n} \quad \text{donc :} \\ &= \frac{\ell}{\ell} \quad \text{i.e. :} \end{aligned}$$

$$= 1$$

Comme $\alpha \neq 1$, il y a donc contradiction, ce qui nous permet d'écrire $\ell = 0$.

- Si $\alpha \in]1, +\infty[$. Dans ce cas, on peut écrire, en conséquence de la définition de la limite :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 \quad \text{donc comme } \forall n \geq n_0, u_n > 0 :$$

$$\forall n \geq n_0, u_{n+1} \geq u_n$$

Ainsi la suite $(U_n)_{n \geq n_0}$ est croissante à partir d'un certain rang et admet donc une limite, finie ou infinie (et dans ce cas celle-ci est $+\infty$).

Or de même que précédemment, la suite $(U_n)_{n \geq n_0}$ ne peut converger que vers 0 ce qui, cette suite étant croissante et avec $u_0 > 0$, est impossible et nous permet donc d'écrire qu'elle diverge vers $+\infty$.

On peut finalement conclure :

La suite $(U_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante (resp. croissante) à partir d'un certain rang si $\alpha \in]0, 1[$ (resp. si $\alpha \in]1, +\infty[$) et converge (resp. diverge) vers 0 (resp. $+\infty$)