Monotonie et nature

Enoncés

1/ Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \prod_{k=1}^{n} u_k \end{cases}$$

a)Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n > 1$$

b) Etudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2/ Etudier la monotonie de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} v_0\in\mathbb{R} \\ \forall n\in\mathbb{N},\ v_{n+1} = 5 + 12v_n^{10} + v_n \end{cases}$$

3) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que : $\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = \alpha$ où α désigne un réel non nul. Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE
© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Correction

1/ a) Montrons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n>1$

- Au rang n=1 Comme $u_1=2$, la proposition est vérifiée.
- Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Supposons que : $\forall k\in[\![1,n]\!],\ u_k>1$

Par multiplication d'inégalités dont les termes sont positifs, on peut alors écrire :

$\prod_{k=1}^{n} u_k > 1$ d'où :

$u_{n+1}>1$

Ainsi, si la proposition est vérifiée jusqu'au rang n, elle l'est également au rang n+1.

- On peut finalement conclure :

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n>1$

b) Comme : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n>0$, on peut écrire :

$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\prod_{k=1}^{n} u_k}{u_n}$ donc :

$\forall n\in[\![2,+\infty[\![\ ,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} = \prod_{k=1}^{n-1} u_k$ d'où :

$\forall n\in[\![2,+\infty[\![\ ,\ \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1.$

La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant à termes strictement positifs et comme $u_2=u_1$, on peut finalement conclure :

La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante

2/ On a :

$\forall n\in\mathbb{N},\ v_{n+1} - v_n = 12\,v_n^{10} + 5$ donc, comme $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n^{10}\geq 0$:

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n \geq 0$ d'où :

La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante

3) Supposons que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite réelle ℓ Dans ce cas, on a :

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ d'où :

$\lim\limits_{n \to +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$

Comme $\alpha \neq 0$, il y a donc contradiction, et l'on peut donc conclure :

La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021