

## Calcul de limites

### Méthodes

Notation : il y a deux façons de noter une limite :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$
- $\limu_{+\infty} = 3$

Attention à ne pas parler de limite ni d'écrire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  tant que l'existence de la limite n'a pas été prouvée. De plus, pour « passer la limite » dans une égalité ou dans une inégalité, il faut s'assurer au préalable que les suites en présence convergent.

#### 1) Limite usuelle

Dans certains cas, il est possible de donner la limite d'une suite d'après le cours (négligeabilités usuelles) :

- Si  $|x| < 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x^n = 0$
- Si  $|q| < 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nq^n = 0$
- Si  $|q| < 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha q^n = 0$
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ ,
- le produit d'une suite bornée par une suite convergeant vers 0 est une suite convergeant vers 0.

## 2) Calcul direct

Dans certains cas, il est possible de déterminer la limite d'une suite en déterminant la limite de ses composantes. Deux cas principaux se présentent :

- *Limite de la somme de deux suites dont on connaît les limites respectives :*

		$-\infty$	$\ell \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$		$-\infty$	$\infty$	Indéterminé
$\ell' \in \mathbb{R}$		$-\infty$	$\ell + \ell'$	$+\infty$
$+\infty$		Indéterminé	$+\infty$	$+\infty$

- *Limite du produit de deux suites dont on connaît les limites respectives :*

	$-\infty$	$\ell < 0$	0	$\ell > 0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	Indéterminé	$-\infty$	$-\infty$
$\ell' < 0$	$+\infty$	$\ell \ell'$	0	$\ell \ell'$	$-\infty$
0	Indéterminé	0	0	0	Indéterminé
$\ell' > 0$	$-\infty$	$\ell \ell'$	0	$\ell \ell'$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	Indéterminé	$+\infty$	$+\infty$

- Si la suite est la suite image par une fonction  $f$  d'une suite simple. Se souvenir que, si la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell$  et si  $\lim_{x \rightarrow \ell} f(x) = \alpha$ , alors la suite  $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\alpha$ .
- Pour déterminer la limite d'une suite de la forme  $(U_n^{V_n})_{n \in \mathbb{N}}$  (où  $u$  est une suite strictement positive), on peut rechercher la limite de la suite  $(v_n \ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  puis utiliser le point précédent avec la fonction exponentielle.
- Pour déterminer la limite d'une suite dont la forme est un produit, on peut se ramener à une somme en utilisant la fonction  $\ln$ .

**3) Par comparaison avec une autre suite**

Pour déterminer la limite d'une suite, on peut utiliser :

- Les équivalents (deux suites équivalentes admettant une limite tendent vers la même limite)
- Les négligeabilités.

**4) En utilisant le théorème de l'encadrement**

Si  $u$ ,  $v$  et  $w$  sont trois suites réelles telles que  $u$  et  $w$  soient convergentes de limite  $\ell$  ( $\ell \in \mathbb{R}$ ) et s'il existe un rang  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que :  $\forall n \geq n_0, u_n \leq v_n \leq w_n$ , alors  $v$  converge vers  $\ell$ .

**Attention ...** Il faut que les suites  $u$  et  $w$  convergent vers la même limite.

**5) Si l'on veut montrer que la suite tend vers  $\ell$** 

- Montrer que la suite  $(u_n - \ell)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers 0.
- Utiliser la définition de la limite (rare) :

$u$  est une suite convergente si :  $\exists \ell \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - \ell| < \varepsilon$  ou  $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$   
 $\ell$  est alors l'unique limite de  $u$ ,

- Reasonner par l'absurde.

**6) Si l'on veut montrer que la suite admet une limite infinie**

- Montrer que la suite est minorée par une suite tendant vers  $+\infty$  ou majorée par une suite tendant vers  $-\infty$ .
- Utiliser la définition (rare)