

Monotonie et nature

Enoncés

EXERCICE 1

Dans cet exercice, $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite réelle telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n \leq 3 + \frac{7}{n} \quad (1)$$

- a) Prouver que si elle est croissante $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et donner un majorant de sa limite.
b) On suppose que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n \geq 3 - \frac{(-1)^n}{n}. \quad (2)$$

Que peut-on en déduire ?

EXERCICE 2

Soit $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $w_0 \in \mathbb{R}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = \frac{w_n^2 + 1}{2}$$

- 1) Prouver que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite.
- 2) Préciser, selon la valeur de w_0 , la limite de la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

EXERCICE 3

Soit la suite $(U_n)_{n \geq 2}$ définie par :

$$\forall n \geq 2, U_n = \left(1 - \frac{2}{n^2}\right)^{3n^2}$$

Déterminer la limite de $(U_n)_{n \geq 2}$.

Correction

EXERCICE 1

a) On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{7}{n} \leq 7$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n \leq 10$

Ainsi, $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée donc $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. Notons l sa limite. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans la relation (1), on obtient alors, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{7}{n} = 0$:

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge, et sa limite est inférieure ou égale à 3.

b) D'après (1) et (2), on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 3 - \frac{(-1)^n}{n} \leq U_n \leq 3 + \frac{7}{n}$$

Comme $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$, et donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[3 - \left(\frac{-1}{n} \right)^n \right] = 3$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[3 + \frac{7}{n} \right] = 3$, on peut alors écrire, d'après le théorème d'existence d'une limite par encadrement :

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$

EXERCICE 2

1) On a :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} - w_n &= \frac{w_n^2 + 1}{2} - w_n && \text{soit encore :} \\ &= \frac{w_n^2 + 1 - 2w_n}{2} && \text{d'où :} \\ &= \frac{(w_n - 1)^2}{2} && \text{et donc :} \end{aligned}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} - w_n \geq 0.$$

Ainsi la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, ce qui nous permet de conclure :

La suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite

2) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 + 1}{2}$. On a alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = f(w_n).$$

f étant continue sur \mathbb{R} , si la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, alors sa limite ℓ est solution de l'équation $\ell = f(\ell)$. Or on a :

$$\begin{aligned} \ell = f(\ell) &\Leftrightarrow \ell = \frac{\ell^2 + 1}{2} && \text{soit encore :} \\ &\Leftrightarrow \frac{\ell^2 + 1}{2} - \ell = 0 && \text{d'où} \\ &\Leftrightarrow \frac{(\ell - 1)^2}{2} = 0 && \text{soit finalement :} \\ &\Leftrightarrow \ell = 1. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut converger que vers 1. Etudions alors les variations de f sur \mathbb{R} . f est dérivable sur \mathbb{R} comme fonction polynôme, et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = x.$$

On peut alors dresser le tableau de variations de f sur \mathbb{R} :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	$+\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$

Deux cas se présentent alors :

- Si $w_0 \in [-1, 1]$. Comme $f([-1, 1]) \subset [-1, 1]$, on obtient alors, par récurrence :
 $\forall n \in \mathbb{N}, w_n \in [-1, 1]$.

Dans ce cas, la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc croissante et majorée, donc convergente et, d'après le résultat précédent, converge vers 1,

- Si $w_0 \notin [-1, 1]$. Comme : $\forall x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1], f(x) \in]1, +\infty[$, on prouve alors, en raisonnant par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n \in]1, +\infty[$.

Etant croissante et comme $w_1 > 1$, la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut donc converger vers 1 (contraposée du théorème de prolongement des inégalités), ce qui nous permet d'écrire que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge. Comme elle admet une limite et comme ses termes (à l'exception éventuelle de w_0) sont positifs, elle diverge donc vers $+\infty$.

On peut finalement conclure :

Si $w_0 \in [-1, 1]$, la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1
 Si $w_0 \notin [-1, 1]$, la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

N.B. : En supposant la convergence de la suite w , on pouvait également passer à la limite dans l'égalité $w_{n+1} = \frac{w_n^2 + 1}{2}$ pour montrer qu'elle ne peut converger que vers 1.

EXERCICE 3

On a :

$$\forall n \geq 2, 1 - \frac{2}{n^2} > 0$$

Et donc :

$$\begin{aligned} \forall n \geq 2, u_n &= \exp \left[3n^2 \ln \left(1 - \frac{2}{n^2} \right) \right] \\ &= \exp \left[-6 \cdot \frac{\ln \left(1 - \frac{2}{n^2} \right)}{-\frac{2}{n^2}} \right]. \end{aligned}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{-2}{n^2} \right) = 0$,

$$\text{On a : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln \left(1 - \frac{2}{n^2} \right)}{-\frac{2}{n^2}} \right) = 1$$

$$\text{Et donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[-6 \frac{\ln \left(1 - \frac{2}{n^2} \right)}{-\frac{2}{n^2}} \right] = -6$$

exp étant continue en -6 , on peut conclure :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^{-6}$$

N.B. : On pouvait également déterminer un équivalent de $3n^2 \ln\left(1 - \frac{2}{n^2}\right)$ au voisinage de $+\infty$ pour déterminer sa limite -6 .