Equivalence de suites

Enoncés

EXERCICE 1

Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$

a. Déterminer un équivalent de A_n^k lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

b. En déduire la limite de $A_n^k\ p^n$ quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 2

Soient a et b deux réels non nuls. Après avoir prouvé que cette suite est bien définie (à partir d'un certain rang), déterminer la limite de la suite (u_n) dont le terme général est défini par :

$$u_n = \frac{\ln\left[\cos\left[\frac{a}{n}\right]\right]}{\ln\left[\cos\left[\frac{b}{n}\right]\right]}$$

EXERCICE 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 1$ et : $\forall\ n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+n\,u_n^2}$. On admet que :

$$\forall\ n\in[2,+\infty[,\ 0<u_n\leq\frac{1}{n}.$$

et que :

$$\forall\ k\in[2,+\infty[,\ \frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k} = ku_k.$$

Déterminer un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE
© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Correction

EXERCICE 1

a. On a :

$$\forall\, n \geq k,\ A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$
$$= n\,(n-1)\,\ldots\,(n-k+1).$$

De plus :

$$\forall i \in [\![0, k-1]\!],\ n-i \underset{n\to+\infty}{\sim} n.$$

Donc le produit comportant k termes :

$$\boxed{A_n^k \underset{n\to+\infty}{\sim} n^k}$$

b. Ainsi :

$$A_n^k p^n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^k p^n$$

Comme $|p| < 1$, on a d'après les croissances comparées : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^k p^n = 0$.

Deux suites équivalentes convergentes ayant la même limite, on peut conclure

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} A_n^k\, p^n = 0.}$$

EXERCICE 2

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b}{n} = 0$ et comme $-\frac{\pi}{2} < 0 < \frac{\pi}{2}$, d'après le cours, on peut écrire que :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geq n_0,\ \begin{cases} -\frac{\pi}{2} < \frac{a}{n} < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2} < \frac{b}{n} < \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{i.e. : } \exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geq n_0,\ \begin{cases} 0 < \cos\left(\frac{a}{n}\right) < 1 \\ 0 < \cos\left(\frac{b}{n}\right) < 1 \end{cases} \text{ et, donc}$$

Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE
© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \geq n_0,\quad \begin{cases} \ln\left(\cos\left(\frac{a}{n}\right)\right) < 0 \\ \ln\left(\cos\left(\frac{a}{n}\right)\right) < 0 \end{cases}$$

On en déduit alors :

$$\forall n \geq n_0,\ u_n = \frac{\ln\left(\cos\left(\frac{a}{n}\right)\right)}{\ln\left(\cos\left(\frac{b}{n}\right)\right)} \qquad \text{soit :}$$

$$= \frac{\ln\left[1+\left(\cos\left(\frac{a}{n}\right)-1\right)\right]}{\ln\left[1+\left(\cos\left(\frac{b}{n}\right)-1\right)\right]}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b}{n} = 0$. Comme $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x - 1) = 0$, on en déduit alors :

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\cos\left(\frac{a}{n}\right)-1\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\cos\left(\frac{b}{n}\right)-1\right) = 0$, soit à l'aide des équivalents classiques :

- $\ln\left[1+\left(\cos\left(\frac{a}{n}\right)-1\right)\right] \sim \cos\left(\frac{a}{n}\right)-1$, et
- $\ln\left[1+\left(\cos\left(\frac{b}{n}\right)-1\right)\right] \sim \cos\left(\frac{b}{n}\right)-1$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

On en déduit alors : $u_n \sim \dfrac{\cos\left(\dfrac{a}{n}\right)-1}{\cos\left(\dfrac{b}{n}\right)-1}$. De plus, comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{b}{n}=0$, on a, toujours à l'aide des équivalents classiques :

- $\cos\left(\dfrac{a}{n}\right)-1 \sim -\dfrac{a^2}{2n^2}$, et :
- $\cos\left(\dfrac{b}{n}\right)-1 \sim -\dfrac{b^2}{2n^2}$

On peut maintenant écrire : $u_n \sim \dfrac{-\dfrac{a^2}{2n^2}}{-\dfrac{b^2}{2n^2}}$, soit : $u_n \sim \dfrac{a^2}{b^2}$, et donc les limites de deux suites équivalentes admettant une limite étant égales :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{a^2}{b^2}}$$

EXERCICE 3

D 'après le résultat admis, on a :

$\forall k \in [2,+\infty[, \dfrac{1}{u_{k+1}}-\dfrac{1}{u_k} \le 1$ donc, en sommant ces inégalités de k=2 à k=n-1($n\in[3,+\infty[$), la somme comportant n-2 termes :

$\forall n \in [3,+\infty[, \sum\limits_{k=2}^{n-1}\left(\dfrac{1}{u_{k+1}}-\dfrac{1}{u_k}\right) \le n-2$ soit encore :

$\forall n \in [3,+\infty[, \dfrac{1}{u_n}-\dfrac{1}{u_2} \le n-2$ et donc

$\forall n \in [3,+\infty[, \dfrac{1}{n-2+\dfrac{1}{u_2}} \le u_n$ d'où

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

$\forall n \in [3,+\infty[, \dfrac{1}{n-2+\dfrac{1}{u_2}} \leq u_n \leq \dfrac{1}{n}$ donc, en multipliant ce résultat par $n \geq 0$:

$$\forall n \in [3,+\infty[, \frac{n}{n-2+\dfrac{1}{u_2}} \leq nu_n \leq 1$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n}{n-2+\dfrac{1}{u_2}} = 1$, on peut alors écrire, d'après le théorème d'existence d'une limite par encadrement : $\lim\limits_{n \to +\infty} nu_n = 1$ soit finalement :

$$\boxed{u_n \sim \frac{1}{n}}$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021