Equivalence de suites

Enoncés

EXERCICE 4

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, deux suites positives. Montrer que :

$u_n \sim v_n \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon>0,\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\ n \geq n_0,\ (1 - \varepsilon)\, v_n \leq u_n \leq (1 + \varepsilon)\, v_n$.

EXERCICE 5

Soient x et y deux réels tels que $0<|x|<|y|$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite définie par :
$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = \alpha x^n + \beta y^n$ où α et β sont deux réels.

1. On suppose que β n'est pas nul, que y est différent de 1 et que :

   a. montrer que : $u_n \sim \beta y^n$

   b. montrer qu'il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0,\ |u_n| > 0$

Donner alors un équivalent de $\ln|u_n|$ quand n est au voisinage de $+\infty$.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur x, y, α et β pour que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée.

Correction

EXERCICE 4

* Supposons que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$

Il existe $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite 1 et $r\in\mathbb{N}$ tels que :

$\forall n\geq r,\ u_n=h_nv_n$

De plus, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} h_n=1$ par définition de la limite :

$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_1\in\mathbb{N},\ \forall n\geq n_1,\ 1-\varepsilon\leq h_n\leq 1+\varepsilon$

Et donc, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant positive :

$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_1\in\mathbb{N},\ \forall n\geq n_1,\ (1-\varepsilon)v_n\leq h_nv_n\leq(1+\varepsilon)v_n$

En posant $n_0=\max(n_1,r)$:

$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\geq n_0,\ (1-\varepsilon)v_n\leq u_n\leq(1+\varepsilon)v_n$

* Réciproquement, supposons que :

$\forall\varepsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\geq n_0,\ (1-\varepsilon)v_n\leq u_n\leq(1+\varepsilon)v_n$

Soient alors $\varepsilon>0$ et $n_0\in\mathbb{N}$ tels que :

$\forall n\geq n_0,\ (1-\varepsilon)v_n\leq u_n\leq(1+\varepsilon)v_n$ (1)

Soit maintenant $n\geq n_0$. Deux cas se présentent :

- Si $v_n\neq 0$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant positive : $v_n>0$. En divisant alors par v_n, on obtient :

  $(1-\varepsilon)\leq\dfrac{u_n}{v_n}\leq(1+\varepsilon)$

  Soit en posant $h_n=\dfrac{u_n}{v_n}$:

  $(1-\varepsilon)\leq h_n\leq(1+\varepsilon)$

Et on a : $u_n = h_n v_n$

- Si $v_n = 0$. D'après la relation (1), $u_n = 0$

En posant $h_n = 1$, on a :

$(1-\varepsilon) \leq h_n \leq (1+\varepsilon)$ et $u_n = h_n v_n (=0)$

Soit alors $(h_n)_{n\geq p}$ la suite définie par :

$$\forall n \geq p, \begin{cases} h_n = \dfrac{u_n}{v_n} & \text{si } v_n \neq 0 \\ h_n = 1, & \text{si } v_n = 0 \end{cases}$$

où p est tel que $\forall\ n \geq p\ \ (u_n = 0 \ \Leftrightarrow v_n = 0)$. D'après les remarques précédentes, on a :

$\forall n \geq p,\ (1-\varepsilon) \leq h_n \leq (1+\varepsilon)$

Et donc, par définition, de la limite :

$\lim\limits_{n\to+\infty} h_n = 1$

De plus, par construction on a :

$\forall n \geq p,\ u_n = h_n v_n$

Il existe donc une suite $(h_n)_{n\in N}$ de limite 1 et $p \in \mathbb{N}$ tels que :

$\forall n \geq p,\ u_n = h_n v_n$

Et donc, par définition : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$

On peut donc conclure :

$$\boxed{u_n \sim v_n \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq\ n_0,\ (1-\varepsilon) v_n \leq u_n \leq (1+\varepsilon) v_n}$$

EXERCICE 5

1.a. On a comme $\beta \neq 0$ et $y \neq 0$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \beta y^n \left(\frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x}{y} \right)^n + 1 \right)$$

comme $\left| \frac{x}{y} \right| < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{x}{y} \right)^n = 0$, et donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x}{y} \right)^n + 1 \right) = 1$.

Par définition de l'équivalence :

$$\boxed{u_n \sim \beta y^n}$$

1.b. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| = |\beta y^n| \left| \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x}{y} \right)^n + 1 \right|$$

De plus :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |\beta y^n| > 0.$$

Et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \left| \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x}{y} \right)^n + 1 \right| = 1$:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0,\ \left| \frac{\alpha}{\beta} \left(\frac{x}{y} \right)^n + 1 \right| > 0.$$

Ainsi :

$$\boxed{\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \geq n_0,\ |u_n| > 0}$$

D'où :

$$\forall\, n \geq n_0,\ \ln|u_n| = \ln|\beta| + n\ln|y| + \ln\left|\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{x}{y}\right)^n + 1\right|$$

Et donc, comme y est différent de 1 :

$$\forall n \geq n_0,\ \frac{\ln|u_n|}{n\ln|y|} = 1 + \frac{\ln|\beta|}{n\ln|y|} + \frac{\ln\left|\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{x}{y}\right)^n + 1\right|}{n\ln|y|}$$

De plus :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln|\beta|}{n\ln|y|} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left|\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{x}{y}\right)^n + 1\right| = \ln 1$$ (car ln est continue au 1).

Comme ln1=0, on a comme $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln|y| = +\infty$ (si $|y| > 1$) et $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln|y| = -\infty$ (si $|y| < 1$) :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left|\frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{x}{y}\right)^n + 1\right|}{n\ln|y|} = 0\,.$$

Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln|u_n|}{n\ln|y|} = 1$$

D'où :

$$\boxed{\ln|u_n| \sim n\ln|y|}$$

2. Si $\beta \neq 0$ et $|y|>1$, d'après la question 1.a. : $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} |\beta y^n| = +\infty$.

$(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est donc pas bornée si $\beta \neq 0$ et si $|y| > 1$.

Si $\beta = 0$ ou si $|y| \le 1$, $\left(\beta y^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors bornée si et seulement si $(\alpha x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc si et seulement si $\alpha = 0$ ou $|x| \le 1$ (pour des raisons similaires).comme $|x| < |y|$, si $|y| \le 1$, on a : $|x| \le 1$.

Ainsi :

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $\alpha = \beta = 0$, $\beta = 0$ et $|x| \le 1$ ou $\beta \ne 0$ et $|y| \le 1$