Suite homographique

Enoncé

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{5u_n + 3}{u_n + 4}.$$

1) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie (on montrera que ses termes sont tous strictement positifs).

2) Soit f la fonction définie sur $]-4,+\infty[$ par :

$$\forall x \in]-4,+\infty[,\ f(x) = \frac{5x+3}{x+4}.$$

a) Montrer que l'équation f(x)=x admet deux solutions distinctes α et β $(\alpha > \beta)$ sur $]-4,+\infty[$.

b) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$.

3) a) Prouver que la suite $\left(\frac{u_n - \alpha}{u_n - \beta}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b) En déduire que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel λ que l'on déterminera.

4) a) Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \le u_{n+1},$$

et que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \le \alpha.$$

b) Retrouver ainsi le résultat de la question 2b.

Correction

1) Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(n)$: « u_n existe et $u_n > 0$ » est vraie.

i) Pour n=0. Par définition, u_0 existe et $u_0 > 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

ii) Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

Comme $u_n > 0$, on a donc : $u_n + 4 > 0$ donc u_{n+1} existe. De plus, comme $u_n > 0$, on a : $5u_n + 3 > 0$ d'où : $u_{n+1} > 0$.

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie donc : $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.

iii) On peut donc conclure :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bien définie et ses termes appartiennent à } \mathbb{R}_+^*}$$

2) a) Soit $x \in]-4, +\infty[$. On a :

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{5x+3}{x+4} - x = 0 \qquad \text{d'où :}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x+3-x^2-4x}{x+4} = 0 \qquad \text{donc :}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 3 = 0.$$

Or, l'équation $x^2 - x - 3 = 0$ admet $\Delta = 13$ pour discriminant, ce qui nous permet de conclure :

$$f(x) = x \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{1-\sqrt{13}}{2}, \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right\}$$

d'où, comme $\frac{1-\sqrt{13}}{2} > -4$:

$$\boxed{\text{L'équation } f(x) = x \text{ admet deux solutions distinctes dans }]-4, +\infty[,\ \alpha = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \text{ et } \beta = \frac{1-\sqrt{13}}{2}.}$$

b) f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}^+$, avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f'(x) = \frac{5(x+4)-(5x+3)}{(x+4)^2}$$ donc :

$$= \frac{17}{(x+4)^2}$$ d'où :

$$>0.$$ et donc :

$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}^+.}$$

3) a) On a , par définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de α et de β :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}-\alpha}{u_{n+1}-\beta} = \frac{\dfrac{5u_n+3}{u_n+4} - \dfrac{5\alpha+3}{\alpha+4}}{\dfrac{5u_n+3}{u_n+4} - \dfrac{5\beta+3}{\beta+4}}$$ donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_{n+1}-\alpha}{u_{n+1}-\beta} = \frac{\beta+4}{\alpha+4} \times \frac{(\alpha+4)(5u_n+3)-(u_n+4)(5\alpha+3)}{(\beta+4)(5u_n+3)-(u_n+4)(5\beta+3)}$$ donc, après simplifications :

$$= \frac{\beta+4}{\alpha+4} \bullet \frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}.$$

On peut finalement conclure, comme $\beta \neq \alpha$:

$$\boxed{\text{La suite } \left(\frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite géométrique de raison } \frac{\beta+4}{\alpha+4}.}$$

NB : peut être eut-il été judicieux de prouver au préalable (par récurrence) que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \neq \beta$.

b) D'après les cours, on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_n-\alpha}{u_n-\beta} = \left(\frac{\beta+4}{\alpha+4}\right)^n \bullet \frac{u_0-\alpha}{u_0-\beta}.$$ d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha + (u_n-\beta)\left(\frac{\beta+4}{\alpha+4}\right)^n \bullet \frac{u_0-\alpha}{u_0-\beta}.$$ donc :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n\left[1-\frac{u_0-\alpha}{u_0-\beta}\left(\frac{\beta+4}{\alpha+4}\right)^n\right]=\alpha-\beta.\frac{u_0-\alpha}{u_0-\beta}\left(\frac{\beta+4}{\alpha+4}\right)^n.$$

Comme $\alpha \neq \beta$, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{u_0-\alpha}{u_0-\beta}\left(\frac{\beta+4}{\alpha+4}\right)^n \neq 1$, d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n=\frac{\alpha-\beta\frac{u_0-\alpha}{u_0-\beta}\left(\frac{\beta+4}{\alpha+4}\right)^n}{1-\frac{u_0-\alpha}{u_0-\beta}\left(\frac{\beta+4}{\alpha+4}\right)^n}$$

Or, comme $\beta<\alpha$ et comme $\alpha>-4$, on a : $\left|\frac{\beta+4}{\alpha+4}\right|<1$ d'où :

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\beta+4}{\alpha+4}\right)^n=0$ ce qui nous permet de conclure :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \alpha=\frac{1+\sqrt{13}}{2}}$$

4) a) i) Pour n=0. On a : $u_0=\frac{1}{2}$ et $u_1=\frac{\frac{5}{2}+3}{\frac{1}{2}+4}=\frac{11}{9}$ d'où : $u_1 \geq u_0$.

Ainsi, la proposition est vraie pour n=0.

ii) Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \leq u_{n+1}$. f étant croissante sur $\mathbb{R}^+$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant positive, on a donc :

$f(u_n) \leq f(u_{n+1})$ d'où :

$u_{n+1} \leq u_{n+2}$.

Ainsi, si la proposition est vraie au rang n, elle l'est au rang n+1.

iii) On peut finalement conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_{n+1}}$$

De même on montrerait par récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \alpha}$$

b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante et majorée par α, elle converge et, comme : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$ et comme f est continue sur $\mathbb{R}^+$, sa limite ℓ est solution de l'équation x=f(x) donc, d'après le résultat du 2a : $\ell \in \{\alpha, \beta\}$.

De plus, par récurrence, on montrerait que :

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > \beta$ donc, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant croissante :

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geq u_0 > \beta$ d'où, par prolongement des inégalités :

$\ell \geq u_0 > \beta$ donc :

$\ell \neq \beta$.

On peut finalement conclure :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \alpha.}$$