Nature d'une série

Méthodes

1. Définition de la convergence

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que la série de terme général u_n converge de somme ℓ ($\ell\in\mathbb{R}$) si la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (suite des sommes partielles) définie par : $\forall n\in\mathbb{N}$, $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ converge vers ℓ et on note alors : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \ell$. Si la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, on dit que la série de terme général u_n diverge.

Si la série de terme général u_n converge, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

Notations. Pour parler de la série de terme général u_n, on doit écrire : « la série de terme général u_n converge », ou bien « $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge ».

Attention, $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ ne désigne pas la série de terme général u_n mais sa somme, dans le cas où elle converge : c'est un réel.

2. Comparaison des séries à termes positifs

Se souvenir que, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites positives et si :

$\exists n_0\in\mathbb{N}$, $\forall n\geq n_0$, $u_n\leq v_n$, alors :

si la série de terme général v_n converge, alors la série de terme général u_n converge également,

si la série de terme général u_n diverge, alors la série de terme général v_n diverge également,

Si $u_n\sim v_n$, alors les séries de terme général u_n et v_n sont de même nature.

Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE
© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

En général, les séries utilisées pour les critères de comparaison sont :

-les séries de référence,
-une série étudiée préalablement.

Attention…Les comparaisons doivent être effectuées sur les termes généraux et non sur les sommes : dans cette méthode, on n'utilise jamais de sommation.

3. Séries absolument convergentes

On dit que la série de terme général u_n est absolument convergente si la série de terme général $|u_n|$ converge.

Toute série absolument convergente est convergente. Attention, si la série de terme général $|u_n|$ diverge, on ne peut pas conclure.

4. Séries de référence

- Soit $q\in\mathbb{R}$. La série de terme général q^n est convergente si et seulement si $|q|<1$ et on a alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$ (série géométrique).

- Soit $q\in\mathbb{R}$. La série de terme général nq^n est convergente si et seulement si $|q|<1$ et on a alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}.$$

- Soit $q\in\mathbb{R}$. La série de terme général n^2q^n est convergente si et seulement si $|q|<1$ et on a alors : $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2q^n = \frac{q(1+q)}{(1-q)^3}$.

- Soit $x\in\mathbb{R}$. La série de terme général $\frac{x^n}{n!}$ est convergente et on a alors : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ (série exponentielle).

- Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. La série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha>1$ (série de Riemann).

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021