Nature d'une série

Enoncés

1) Déterminer la nature des séries dont le terme général est défini par :

a) $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n = 1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)$,

b) $\forall n\in\mathbb{N}^*, v_n = \frac{(-1)^n \cos n}{n\sqrt{n}}$,

c) $\forall n\geq 2, z_n = \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$.

2) Soient α et β deux réels avec $\alpha<1$. Etudier la nature de la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$.

3) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle à termes positifs et p un entier naturel supérieur ou égal à 2. On suppose que la série de terme général u_n converge. Montrer que la série de terme général u_n^p converge.

4) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive telle que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente et telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 .$$

a) Montrer que $\exists\, q \in]0,1[, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \forall\, n \in [\![n_0, +\infty[\![, 0 \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q$.

b) En déduire que la série de terme général u_n est convergente.

Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE
© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Corrections

1) a) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$, donc d'après les équivalents de référence : $u_n\sim\frac{1}{2n^2}$. Comme la série de terme général $\frac{1}{2n^2}$ converge (série de Riemann, 2>1), on peut alors conclure, d'après les critères de comparaison des séries à termes positifs (en effet : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\frac{1}{2n^2}\geq 0$) :

La série de terme général u_n converge

b) On a : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\left|\frac{(-1)^n\cos n}{n\sqrt{n}}\right|\leq\frac{1}{n\sqrt{n}}$.

Comme $\forall n\in\mathbb{N}^*,\begin{cases}\left|\frac{(-1)^n\cos n}{n\sqrt{n}}\right|\geq 0\\ \frac{1}{n\sqrt{n}}\geq 0\end{cases}$ et comme la série de terme général $\frac{1}{n\sqrt{n}}=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge (série de Riemann), les règles de comparaison des séries à termes positifs nous permettent alors d'écrire que la série de terme général $\left|\frac{(-1)^n\cos n}{n\sqrt{n}}\right|$ converge, donc que la série de terme général $\frac{(-1)^n\cos n}{n\sqrt{n}}$ converge absolument, et donc que :

La série de terme général $\frac{(-1)^n\cos n}{n\sqrt{n}}$ converge

c) On a : $\forall n\in[\![2,+\infty[\![,z_n=\frac{1}{n}+\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)$ soit encore :

$$=\frac{1}{n}+\ln\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

Déterminons alors un équivalent de z_n quand n tend vers $+\infty$. Quand x est au voisinage de 0, on a :

$\ln(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ donc :

$x+\ln(1-x)=-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$ d'où :

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

$x+\ln(1-x) \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$ et donc, comme : $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}=0$

$z_n \sim -\frac{1}{2n^2}$ d'où :

$-z_n \sim \frac{1}{2n^2}$

Comme la série de terme général $\frac{1}{n^2}$ $(n\geq 1)$ converge (série de Riemann, $2>1$), on peut alors écrire la suite $\left(\frac{1}{2n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant positive et d'après les critères de comparaison des séries à termes positifs, que la série de terme général $-z_n$ $(n\geq 2)$ converge, et l'on peut donc conclure :

La série de terme général z_n $(n\geq 2)$ converge.

2) Comme $\alpha<1$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} n^{\alpha-1}\ln^{\beta} n=0$ (croissances comparées). Comme $0<1$, on en déduit alors :

$\exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\geq n_0,\ n^{\alpha-1}\ln^{\beta} n<1$, d'où en divisant par $n^{\alpha}\ln^{\beta} n>0$ (pour $n\geq 2$) :

$\exists n_0\in[\![2,+\infty[\![,\ \forall n\geq n_0,\ \frac{1}{n}<\frac{1}{n^{\alpha}\ln^{\beta} n}$.

Comme $\forall n\in[\![2,+\infty[\![,\ \begin{cases}\frac{1}{n}\geq 0\\ \frac{1}{n^{\alpha}\ln^{\beta} n}\geq 0\end{cases}$ et comme la série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge, les règles de comparaison des séries à termes positifs nous permettent alors de conclure :

La série de terme général $\frac{1}{n^{\alpha}\ln^{\beta} n}$ diverge

3) Comme la série de terme général u_n converge, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$. Par définition de la limite d'une suite, on peut donc écrire la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant à termes positifs :

$\exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\geq N,\ 0\leq u_n\leq 1$ donc la fonction $x\to x^{p-1}$ étant croissante sur $\mathbb{R}^+$:

$\exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\geq N,\ 0\leq u_n{}^{p-1}\leq 1$ d'où en multipliant par $u_n\geq 0$:

$\exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\geq N,\ 0\leq u_n{}^{p}\leq u_n$

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Comme la série de terme général u_n converge, on peut donc conclure, d'après les critères de comparaison des séries à termes positifs :

La série de terme général $u_n^{\,p}$ converge

4) a) Soit ℓ la limite de la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme $\ell\in[0,1[$, il existe $q\in]0,1[$ tel que : $0\leq\ell<q<1$ (par exemple : $q=\frac{\ell+1}{2}$). De plus, d'après la définition de la limite, on peut écrire :

$\exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\geq n_0,\ \frac{u_{n+1}}{u_n}<q$, et donc la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ étant positive :

$\exists q\in]0,1[,\ \exists n_0\in\mathbb{N},\ \forall n\in[\![n_0,+\infty[\![,\ 0\leq\frac{u_{n+1}}{u_n}\leq q$

b) Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement positive, on peut alors écrire :

$\forall k\geq n_0,\ 0<u_{k+1}\leq qu_k$ soit, en multipliant ces relations membre à membre pour $k=n_0$ à $k=n-1$ $(n>n_0)$ et en divisant la relation obtenue par $u_{n_0+1}\ u_{n_0+2}\ \ldots.\ u_{n-1}>0$

$\forall n>n_0,\ 0<u_n\leq q^{n-n_0}u_{n_0}$ i.e. :

$\forall n>n_0,\ 0<u_n\leq q^n\frac{u_{n_0}}{q^{n_0}}$.

Comme $q\in]0,1[$, on peut écrire que la série de terme général q^n converge, donc que la série de terme général $q^n\frac{u_{n_0}}{q^{n_0}}$ converge également. Les règles de comparaison des séries à termes positifs nous permettent alors de conclure :

La série de terme général u_n converge.

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021