Vecteurs aléatoires discrets

Méthodes

I. Vecteurs aléatoires discrets à valeurs dans $\mathbb{R}^2$

- ***Vecteurs aléatoires discrets à valeurs dans*** $\mathbb{R}^2$**.** Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes. L'application $(X,Y):\begin{vmatrix}\Omega \to \mathbb{R}^2\\ \omega \mapsto (X(\omega),Y(\omega))\end{vmatrix}$ est un vecteur aléatoire discret à valeur dans $\mathbb{R}^2$ (ou couple de variables aléatoires réelles discrètes).

- ***Loi de probabilité ou loi conjointe de (X,Y).*** On appelle loi de probabilité (ou loi conjointe) d'un couple de variables aléatoires réelles discrètes (X,Y), l'application $p:\begin{vmatrix}(X,Y)(\Omega) \to \mathbb{R}\\ (i,j) \mapsto p([X=i]\cap[Y=j])\end{vmatrix}$.

- ***Loi marginale de X***. Soient (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes. On appelle loi marginale de X, l'application $p:\begin{vmatrix}X(\Omega) \to \mathbb{R}\\ i \mapsto \sum\limits_{j\in Y(\Omega)} p([X=i]\cap[Y=j])\end{vmatrix}$.

- ***Loi conditionnelle de X sachant [Y=j].*** Soient (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes et $j \in Y(\Omega)$ tel que $p(Y=j) \neq 0$. On appelle loi conditionnelle de X sachant [Y=j], l'application :
$p:\begin{vmatrix}X(\Omega) \to \mathbb{R}\\ i \mapsto p\left(X=i \middle/ Y=j\right)=\dfrac{p([X=i]\cap[Y=j])}{p(Y=j)}\end{vmatrix}$.

- ***Indépendance de deux variables aléatoires.*** Soient (X,Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes. X et Y sont indépendantes si
$\forall (i,j)\in (X,Y)(\Omega), p([X=i]\cap[Y=j])=p(X=i)p(Y=j)$.

II. Vecteurs aléatoires discrets à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

- ***Vecteurs aléatoires discrets à valeurs dans*** $\mathbb{R}^n$**.** Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $(X_i)_{1\le i\le n}$ n variables aléatoires réelles discrètes.
L'application $(X_i)_{1\le i\le n}:\begin{vmatrix}\Omega \to \mathbb{R}^n\\ \omega \mapsto (X_i(\omega))_{1\le i\le n}\end{vmatrix}$ est un vecteur aléatoire discret à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

- ***Loi de probabilité de*** $(X_i)_{1=i=n}$**.** On appelle loi du vecteur aléatoire discret $(X_i)_{1\le i\le n}$, l'application $p:\begin{vmatrix}(X_i)_{1\le i\le n}(\Omega) \to \mathbb{R}\\ (K_i)_{1\le i\le n} \mapsto p\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n}[X_i=K_i]\right)\end{vmatrix}$, également notée
$p:\begin{vmatrix}(x_i)_{1\le i\le n}(\Omega) \to \mathbb{R}\\ (K_i)_{1\le i\le n} \mapsto p(X_1=K_1, X_2=K_2,\ldots,X_n=K_n)\end{vmatrix}$.

 Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

- ***Loi marginale de X_1.*** Soit $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ un vecteur aléatoire discret à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On appelle loi marginale de X_1, l'application $p : \begin{vmatrix} X_1(\Omega) \to \mathbb{R} \\ i \mapsto \sum\limits_{(K_j)_{2\leq j\leq n}\in(X_j)_{2\leq j\leq n}(\Omega)} p\left(\left[X_1 = i\right]\cap\left(\bigcap\limits_{j=2}^{n}\left[X_j = K_j\right]\right)\right) \end{vmatrix}$.

- ***Indépendance.*** Soit $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ un vecteur aléatoire discret à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Les variables aléatoires $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ sont mutuellement indépendantes (ou indépendantes) si :

$$\forall (K_i)_{1\leq i\leq n}\in (X_i)_{1\leq i\leq n}(\Omega), p\left(\bigcap_{i=1}^{n}\left[X_i = K_i\right]\right) = p\left(X_1 = K_1, X_2 = K_2, \ldots, X_n = K_n\right) = \prod_{i=1}^{n} p\left(X_i = K_i\right).$$

- Soit $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ un vecteur aléatoire discret à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Si les variables aléatoires $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ sont indépendantes, alors :

  - toute permutation de $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ est indépendante,
  - pour tout $p\in[\![1,n]\!]$, les variables aléatoires $(X_i)_{1\leq i\leq p}$ sont indépendantes et :
  - pour tout $p\in[\![1,n-1]\!]$, toute fonction de $(X_i)_{1\leq i\leq p}$ est indépendante de toute fonction de $(X_i)_{p+1\leq i\leq n}$.

  Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes. Cette suite est une suite de variables aléatoires indépendantes si toute sous-suite finie de cette suite est constituée de variables aléatoires indépendantes.

III. Opérations sur les variables aléatoires

- ***Linéarité de l'espérance***. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes admettant une espérance. On a : $\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2, E(aX+bY) = aE(X)+bE(Y)$.

- ***Covariance***. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes admettant une espérance et telles que XY admette également une espérance. On appelle covariance de X et Y et on note $cov(X,Y)$, le nombre :

  $cov(X,Y) = E\left((X-E(X)(Y-E(Y))\right)$ soit :
  $cov(X,Y) = E(XY) - E(X)\,E(Y)$.

  En particulier, on a : $cov(X,X) = V(X)$.

- ***Propriétés de la covariance***. Soient X, Y et Z trois variables aléatoires réelles discrètes admettant une espérance et telles que XZ et YZ admettent également une espérance.

  On a :

  $\forall (a,b)\in\mathbb{R}^2, cov(aX+bY,Z) = a\ cov(X,Z) + b\ cov(Y,Z)$,
  $cov(X,Y) = cov(Y,X)$,
  $|cov(X,Y)| \leq \sqrt{V(X)V(Y)}$.

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

- ***Variance d'une somme***. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes admettant une variance et telles que XY admette une espérance. On a :
$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{cov}(X,Y)$.

Plus généralement, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 et pour toute suite $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ de variables aléatoires réelles discrètes admettant une espérance et telles que, pour tout couple $(i, j) \in [\![1,n]\!]^2$, X_iX_j admette une espérance, on a

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2\sum_{1\leq i\leq j\leq n} \text{cov}(X_i,X_j).$$

Soient I et J deux sous-ensembles de $\mathbb{N}$, X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes telles que $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j, j \in J\}$, f une fonction définie sur $(X,Y)(\Omega)$ et $Z = f(X,Y)$. Z est une variable aléatoire discrète et, si la double somme $\sum_{\substack{i\in I\\ j\in J}} \left|f(x_i,y_j)\, p([X=x_i]\cap[Y=y_j])\right|$ existe, alors Z admet une espérance et cette espérance vaut : $E(Z) = \sum_{\substack{i\in I\\ j\in J}} f(x_i,y_j)\, p([X=x_i]\cap[Y=y_j])$.

En particulier, si E(XY) existe, on a : $E(XY) = \sum_{\substack{i\in I\\ j\in J}} x_iy_j\, p([X=x_i]\cap[Y=y_j])$.

Indépendance. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes indépendantes. On a alors :

- $\text{cov}(X,Y) = 0$,
- $E(XY) = E(X)E(Y)$ (si X et Y admettent une espérance);
- $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ (si X et Y admettent une variance).

Coefficient de corrélation linéaire. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes non constantes ou quasi-constantes. On appelle coefficient de corrélation linéaire et on note $\rho_{x,y}$ le nombre : $\rho_{x,y} = \dfrac{\text{cov}(X,Y)}{\sigma_x\sigma_y}$.

On a : $|\rho_{x,y}| \leq 1$ et $\rho_{x,y} = 1$ et si et seulement si $\exists(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, Y = aX + b$. Y est alors dite fonction quasi-affine de X.

Stabilité pour la somme des lois binomiale et de Poisson. Soient X et X' deux variables aléatoires réelles discrètes indépendantes,

- si X suit $\mathcal{B}(n,p)$ et X' suit $\mathcal{B}(n',p)$, alors (X+X') suit $\mathcal{B}(n+n',p)$,
- si X suit $\mathcal{P}(\lambda)$ et X' suit $\mathcal{P}(\lambda')$, alors (X+X') suit $\mathcal{P}(\lambda+\lambda')$.

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021