Intégrales impropres

Enoncés

EXERCICE 1

Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes :

1.1 $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$, où f est une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$ et de signe constant sur un intervalle $[a,+\infty[$ de $\mathbb{R}^+$, tendant vers α ($\alpha \in \overline{\mathbb{R}^*}$ où $\overline{\mathbb{R}^*} = \mathbb{R}^* \cup \{-\infty,+\infty\}$) en $+\infty$.

1.2 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t} dt$,

1.3 $\int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha} dt$ $(\alpha \in \mathbb{R})$,

1.4 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt$,

1.5 $\int_{-1}^1 \frac{dt}{\ln|t|}$.

EXERCICE 2

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt .$$

On rappelle que $I_0 = \sqrt{2p}$ et $I_1 = 0$ (cf chapitre Variables à densité).

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, I_n converge.

2) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de I_{n+2} en fonction de I_n.

3) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de I_n en fonction de n.

Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE
© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

EXERCICE 3

Soit $c \in [1, +\infty[$. On considère une fonction g positive, continue sur $[1, +\infty[$, décroissante sur $[c, +\infty[$ et telle que l'intégrale $\int_1^{+\infty} g(t)dt$ soit divergente. On considère également une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que :

$$w_{n+1} - w_n \sim g(n).$$

1) Soient q et N deux entiers naturels tels que : $c \leq q < N$.

a) Montrer que :

$$\forall n \in [\![q, +\infty[\![, g(n+1) \leq \int_n^{n+1} g(t)dt \leq g(n).$$

b) En déduire que :

$$\int_q^N g(t)dt \leq \sum_{n=q}^{N-1} g(n) \leq \int_q^N g(t)dt + g(q)$$

2) Soit ε un réel de $]0,1[$.

a) Montrer que :

$$\exists q \in [\![c, +\infty[\![,\ \forall n \in [\![q, +\infty[\![,\ (1-\varepsilon)g(n) \leq w_{n+1} - w_n \leq (1+\varepsilon)g(n)$$

b) En déduire que :

$$\forall N \in [\![q+1, +\infty[\![, (1-\varepsilon) \leq \int_1^N g(t)dt - (1-\varepsilon)\int_1^q g(t)dt + w_q \leq w_N \leq (1+\varepsilon)\int_1^N g(t)dt + (1+\varepsilon)g(q) +$$

3) Montrer alors que :

$$w_n \sim \int_1^n g(t)\,dt.$$

4) Prouver enfin que :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n.$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Corrections

EXERCICE 1

1) Trois cas se présentent :

- si $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Dans ce cas, par définition de la limite, on peut donc écrire : $\exists A \in \mathbb{R}^+,\ \forall t > A,\ f(t) \geq \frac{\alpha}{2} \geq 0$. Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\alpha}{2} dt$ diverge, on peut donc écrire, d'après les théorèmes de comparaison des intégrales de fonctions positives, que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ diverge,

- Si $\alpha = +\infty$. Dans ce cas, on peut écrire, par définition de la limite : $\exists A \in \mathbb{R}^+,\ \forall t > A,\ f(t) \geq 1$. Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} 1\, dt$ diverge, on peut donc écrire, d'après les théorèmes de comparaison des intégrales de fonctions positives, que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ diverge.

- Si $\alpha \in \mathbb{R}^* \cup \{-\infty\}$. En raisonnant comme précédemment avec la fonction -f, on montrerait que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ diverge.

On peut finalement conclure :

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^{+\infty} f(t)\, dt \text{ diverge}}$$

2) La fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{t}$ est continue sur $[1, +\infty[$ en tant que quotidien (dont le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues sur $[1, +\infty[$. De plus, on a :

$\forall t \in [e, +\infty[,\ \ln t \geq 1$ soit, en divisant par $t > 0$:

$\forall t \in [e, +\infty[,\ \frac{\ln t}{t} \geq \frac{1}{t}$.

Les fonctions $t \mapsto \frac{\ln t}{t}$ et $t \mapsto \frac{\ln t}{t}$ étant continues et positives sur $[1, +¥[$, comme $\grave{0}_1^{+¥} \frac{dt}{t}$ diverge (intégrale de Riemann), les critères de comparaison des intégrales de fonctions positives nous permettent alors d'écrire que :

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t}\, dt \text{ diverge}}$$

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

3) Deux cas se présentent :

- Si $\alpha \leq 0$, la fonction $t \mapsto e^{-t^\alpha}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, on a :

  $\forall t \in [1, +\infty[, t^\alpha \leq 1$ d'où :

  $\forall t \in [1, +\infty[, -t^\alpha \geqslant -1$ et en composant par la fonction exponentielle (croissante) :

  $\forall t \in [1, +\infty[, e^{-t^\alpha} \geqslant e^{-1}$.

  Les fonctions $t \mapsto e^{-t^\alpha}$ et $t \mapsto e^{-1}$ étant continues et positives sur $\mathbb{R}^+$, comme $\int_1^{+\infty} e^{-1}\,dt$ diverge (car l'intégrale $\int_1^{+\infty} dt$ diverge), les critères de comparaison des intégrales de fonctions positives nous permettent d'écrire que l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t^\alpha}\,dt$ diverge, et donc que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha}\,dt$ diverge.

- Si $\alpha > 0$, la fonction $t \mapsto e^{-t^\alpha}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. De plus, on a : $\lim_{t \to +\infty} t^2 e^{-t^\alpha} = 0$ (croissances comparées), d'où :

  $\exists A \in \mathbb{R}, \forall t > A, t^2 e^{-t^\alpha} \leq 1$ soit, en divisant par $t^2 > 0$ ($t \in \mathbb{R}_+^*$) :

  $\exists A \in \mathbb{R}^+, \forall t > A, e^{-t^\alpha} \leq \dfrac{1}{t^2}$.

  Les fonctions $t \mapsto e^{-t^\alpha}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ étant continues et positives sur $\mathbb{R}_+^*$, comme $\int_1^{+\infty} \dfrac{dt}{t^2}$ converge (intégrale de Riemann), les critères de comparaison des intégrales de fonctions positives nous permettent d'écrire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha}\,dt$ converge.

L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha}\,dt$ converge si et seulement si $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

4) La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$ est continue sur $]0,1[$.

- De plus, au voisinage de 0, on a : $\dfrac{1}{\sqrt{t(1-t)}} \underset{0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$. Les fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$ et $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ étant continues et positives sur $]0,1[$, comme $\int_0^1 \dfrac{dt}{\sqrt{t}}$ converge (intégrale de Riemann), les critères de comparaison des intégrales de fonctions positives nous permettent d'écrire que $\int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{\sqrt{t(1-t)}}\,dt$ converge.

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

- De même, au voisinage de 1, on a : $\frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} \underset{1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{1-t}}$. Les fonctions $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}}$ et $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ étant continues et positives sur $]0,1[$, comme $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$ converge (en posant avec soin $u = 1-t$, on se ramène à une intégrale de Riemann convergente), les critères de comparaison des intégrales de fonctions positives nous permettent d'écrire que $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt$ converge.

- Comme les intégrales $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt$ et $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt$ convergent, on peut désormais conclure :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt \text{ converge}}$$

5) La fonction $t \mapsto \frac{1}{\ln|t|}$ est continue sur $]-1,0[$ et sur $]0,1[$. De plus, au voisinage de1, on a : $\frac{1}{\ln|t|} \underset{1}{\sim} \frac{1}{t-1}$. La fonction $t \mapsto 1-t$ étant de classe C^1 sur $[0,1[$, donc, pour tout $x \in [0,1[$, de classe C^1 sur $[0,x[$, en effectuant le changement de variable $u = 1-t$, $du = -dt$, on peut alors écrire : $\forall x \in [0,1[, \int_0^x \frac{dt}{t-1} = -\int_{1-x}^1 \frac{du}{u}$.

Or, comme $\int_0^1 \frac{du}{u}$ diverge (intégrale de Riemann), la fonction $x \mapsto \int_{1-x}^1 \frac{du}{u}$ n'admet pas de limite finie lorsque x tend vers 1, donc la fonction $x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{t-1}$ n'admet également pas de limite finie lorsque x tend vers 1, donc l'intégrale $x \mapsto \int_0^1 \frac{dt}{t-1}$ diverge.

Les fonctions $t \mapsto \frac{1}{\ln|t|}$ et $t \mapsto \frac{1}{t-1}$ étant continues et négatives sur $]0,1[$, comme $\int_0^1 \frac{dt}{t-1}$ diverge, les critères de comparaison des intégrales de fonctions de signe constant nous permettent d'écrire que l'intégrale $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dt}{\ln|t|}$ diverge, et donc :

$$\boxed{\int_{-1}^1 \frac{dt}{\ln|t|} \text{ diverge}}$$

 Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

EXERCICE 2

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto t^n e^{-\frac{t^2}{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme produit et composée de fonctions continues sur $\mathbb{R}$. De plus, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} t^{n+2} e^{-\frac{t^2}{2}} = 0$ (croissance comparées). D'après la définition de la limite, on peut donc écrire :

$\exists A \in \mathbb{R}, \forall t \geq A, t^{n+2} e^{-\frac{t^2}{2}} \leq 1$ d'où :

$\exists A \in \mathbb{R}, \forall t \geq A, t^n e^{-\frac{t^2}{2}} \leq \frac{1}{t^2}$

Comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge (intégrale de Riemann), et comme : $\forall t \in \mathbb{R}^+, t^n e^{-\frac{t^2}{2}} \geq 0$, on peut donc écrire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ converge. De même, comme $\lim\limits_{x \to -\infty} \left| t^{n+2} e^{-\frac{t^2}{2}} \right| = 0$, on peut écrire que l'intégrale $\int_{-\infty}^0 \left| t^n e^{-\frac{t}{2}} \right| dt$ converge, donc que l'intégrale $\int_{-\infty}^0 \left| t^n e^{-\frac{t^2}{2}} \right| dt$ est absolument convergente. On peut finalement conclure :

Pour tout $n \in \mathbb{N}, I_n$ converge

2) Soient $n \in \mathbb{N}$ et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = \int_0^x t^{n+2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. On a :

$\forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = \int_0^x t^{n+1} t\, e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

Les fonctions $t \mapsto t^{n+1}$ et $t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2}}$ étant de classe C^1 sur $[0,x] (x \in \mathbb{R}^+)$, en effectuant une intégration par parties (on intègre $t \mapsto te^{-\frac{t^2}{2}}$ et on dérive $t \mapsto t^{n+1}$), on obtient :

$\forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = \left[-t^{n+1} e^{-\frac{t}{2}} \right]_0^x + (n+1) \int_0^x t^n e^{-\frac{t}{2}}$ d'où :

$\forall x \in \mathbb{R}^+, f_n(x) = -x^{n+1} e^{-\frac{x^2}{2}} + (n+1) \int_0^x t^n e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

 Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{n+2}e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$, en faisant tendre x vers $+\infty$, on obtient : $\int_0^{+\infty} t^{n+2}e^{-\frac{t^2}{2}}dt = (n+1)\int_0^{+\infty} t^n e^{-\frac{t^2}{2}}dt$. De même, on a : $\int_{-\infty}^{0} t^{n+2}e^{-\frac{t^2}{2}}dt = (n+1)\int_{+\infty}^{0} t^n e^{-\frac{t^2}{2}}dt$. On peut finalement conclure, d'après la relation de Chasles :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = (n+1)I_n}$$

3) Montrons alors par récurrence que : $\forall p \in \mathbb{N}, \begin{cases} I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^p p!}I_0 \\ I_{2p+1} = 2^p p! I_1 \end{cases}$.

- Au rang $p = 0$. On a bien : $I_0 = I_0$ et $I_1 = I_1$. La propriété est donc bien vérifiée au rang $p = 0$.

- Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons que : $\begin{cases} I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^p p!}I_0 \\ I_{2p+1} = 2^p p! I_1 \end{cases}$. D'après le résultat de la question précédente, on peut alors écrire : $\begin{cases} I_{2p+2} = (2p+1)\dfrac{(2p)!}{2^p p!}I_0 \\ I_{2p+3} = (2p+2)2^p p! I_1 \end{cases}$ d'où : $\begin{cases} I_{2p+2} = \dfrac{(2p+2)!}{2^{p+1}(p+1)!} \\ I_{2p+3} = 2^{p+1}(p+1)! I_1 \end{cases}$. Ainsi, la propriété est vérifiée au rang $p+1$.

- Ainsi, on a bien : $\forall p \in \mathbb{N}, \begin{cases} I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^p p!}I_0 \\ I_{2p+1} = 2^p p! I_1 \end{cases}$

- De plus, on a :

  $I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ d'où, comme $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$ est une densité de probabilité : $= \sqrt{2\pi}$.

  De même, comme $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$ est une densité de la loi normale centrée réduite, on peut écrire, en considérant une variable aléatoire X suivant une loi normale centrée réduite : $I_1 = E(X)$, donc : $I_1 = 0$.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

On peut finalement conclure :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \begin{cases} I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^p p!}\sqrt{2\pi} \\ I_{2p+1} = 0 \end{cases}$$

EXERCICE 3

1) a) Comme q est supérieur ou égal à c, la fonction g est décroissante sur $[q, +\infty[$, donc, pour tout $n \in [\![q, +\infty[\![$, sur $[n, n+1]$, et on a :

$$\forall n \in [\![q, +\infty[\![, \forall t \in [n, n+1], g(n+1) \leq g(t) \leq g(n)$$

D'où, en intégrant ces inégalités sur $[n, n+1]$, les fonctions en présence étant continues, pour tout $n \in [\![q, +\infty[\![$, sur $[n, n+1]$ (car : $\forall n \in [\![q, +\infty[\![, [n, n+1] \subset [1, +\infty[$) :

$$\forall n \in [\![q, +\infty[\![, \int_n^{n+1} g(n+1)\,dt \leq \int_n^{n+1} g(t)dt \leq \int_n^{n+1} g(n)\,dt .$$

Or, on a :

$$\forall n \in [\![q, +\infty[\![, \int_n^{n+1} g(n+1)\,dt = (n+1-1)g(n+1) \quad \text{donc :}$$
$$= g(n+1) \quad \text{et :}$$

$$\forall n \in [\![q, +\infty[\![, \int_n^{n+1} g(n)\,dt = g(n).$$

On peut désormais conclure :

$$\forall n \in [\![q, +\infty[\![, g(n+1) \leq \int_n^{n+1} g(t)\,dt \leq g(n)$$

b) En sommant alors l'inégalité de droite de $n = q$ à $n = N-1$ $(N > q)$, on obtient :

$$\sum_{n=q}^{N-1} \int_n^{n+1} g(t)\,dt \leq \sum_{n=q}^{N-1} g(n) \qquad \text{soit, d'après la relation de Chasles :}$$
$$\int_q^N g(t)\,dt \leq \sum_{n=q}^{N-1} g(n)$$

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

De même, en sommant l'inégalité de gauche de $n = q$ à $n = N - 1$ $(N > q)$, on peut écrire :

$\sum_{n=q}^{N-1} g(n+1) \leq \sum_{n=q}^{N-1} \int_n^{n+1} g(t)\,dt$ d'où, d'après la relation de Chasles, et en effectuant le changement d'indice $n' = n + 1$ dans la somme de gauche :

$\sum_{n=q+1}^{N} g(n) \leq \int_q^N g(t)\,dt$ soit encore :

$\sum_{n=q}^{N-1} g(n) - g(q) + g(N) \leq \int_q^N g(t)\,dt$ i.e. :

$\sum_{n=q}^{N} g(n) \leq \int_q^N g(t)\,dt + g(q) - g(N)$ et donc, comme $g(N) \geqslant 0$ (car $N > q \geqslant c \geqslant 1$) :

$\leq \int_q^N g(t)\,dt + g(q)$ ‖

En considérant les relations ⁗ et ‖, on peut finalement conclure :

$$\int_q^N g(t)\,dt \leq \sum_{n=q}^{N-1} g(n) \leq \int_q^N g(t)dt + g(q)$$

2) a) Comme par hypothèse, on a : $w_{n+1} - w_n \sim g(n)$, on peut écrire, par définition de l'équivalent, qu'il existe une suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tendant vers 1 quand n tend vers $+\infty$ telle que : $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \geqslant n_0, w_{n+1} - w_n = h_n g(n)$. De plus, comme : $\lim_{n \to \infty} h_n = 1$, on peut écrire d'après la définition de la limite d'une suite :

$\exists q \in [c, +\infty[\cap [n_0, +\infty[, \forall n \geqslant q, 1 - \varepsilon \leq h_n \leq 1 + \varepsilon$ et donc en multipliant par $g(n) \geqslant 0$:

$\exists q \in [c, +\infty[\cap [n_0, +\infty[, \forall n \geqslant q, (1 - \varepsilon)g(n) \leq h_n g(n) \leq (1 + \varepsilon)g(n)$ soit, comme : $\forall n \geqslant n_0$, $h_n g(n) = w_{n+1} - w_n$

$\exists q \in [c, +\infty[\cap [n_0, +\infty[, \forall n \geqslant q, (1 - \varepsilon)g(n) \leq w_{n+1} - w_n \leq (1 + \varepsilon)g(n)$.

On peut donc conclure :

> Il existe un entier naturel q supérieur ou égal à c tel que :
>
> $\forall n \in [q, +\infty[, (1 - \varepsilon)g(n) \leq w_{n+1} - w_n \leq (1 + \varepsilon)g(n)$

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

b) En sommant les inégalités précédentes de n=q à n=N-1 (N>q), on a alors :

$(1-\varepsilon)\sum_{n=q}^{N-1} g(n) \leq \sum_{n=q}^{N-1} (w_{n+1} - w_n) \leq (1+\varepsilon)\sum_{n=q}^{N-1} g(n)$ soit, les termes s'éliminant deux à deux dans la troisième somme :

$(1-\varepsilon)\sum_{n=q}^{N-1} g(n) \leq w_N - w_q \leq (1+\varepsilon)\sum_{n=q}^{N-1} g(n)$ i.e. :

$(1-\varepsilon)\sum_{n=q}^{N-1} g(n) + w_q \leq w_N \leq (1+\varepsilon)\sum_{n=q}^{N-1} g(n) + w_q$ ‖

De plus, en multipliant l'inégalité de gauche du 1b par $1-\varepsilon$ $(1-\varepsilon \neq 0$ car $\varepsilon<1)$, on peut écrire :

$(1-\varepsilon)\int_q^N g(t)dt \leq (1-\varepsilon)\sum_{n=q}^{N-1} g(n)$ d'où, d'après la relation ‖ :

$(1-\varepsilon)\int_q^N g(t)dt + w_q \leq w_N$ soit, comme : $\int_q^N g(t)dt = \int_1^N g(t)dt - \int_1^q g(t)dt$ (relation de Chasles, g étant continue sur $[1,N]$) :

$(1-\varepsilon)\int_1^N g(t)dt - (1-\varepsilon)\int_1^q g(t)dt + w_q \leq w_N$.

De même, en multipliant l'inégalité de droite du 1b par $1+\varepsilon$ $(1+\varepsilon \neq 0$ car $\varepsilon > 0)$, on peut écrire :

$(1+\varepsilon)\sum_{n=q}^{N-1} g(n) \leq (1+\varepsilon)\int_q^N g(t)dt + (1+\varepsilon)g(q)$ d'où, d'après la relation ‖ :

$w_N \leq (1+\varepsilon)\int_q^N g(t)dt + (1+\varepsilon)g(q) + w_q$

Or on a, d'après la relation de Chasles, g étant continue sur $[1,n]$:

$\int_q^N g(t)dt = \int_1^N g(t)dt - \int_1^q g(t)dt$ d'où comme :

$\int_1^q g(t)dt \geq 0$ (car g est positive sur $[1,+\infty[$) : $\int_q^N g(t)dt \leq \int_1^N g(t)dt$. Comme : $1+\varepsilon \geq 0$, on a donc:

$w_N \leq (1+\varepsilon)\int_1^N g(t)\,dt + (1+\varepsilon)\,g(q) + w_q$ ⑤.

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

On peut alors conclure, en considérant les relations ④ et ⑤ :

$$(1-\varepsilon)\int_1^N g(t)\,dt-(1-\varepsilon)\int_1^q g(t) + w_q \leq w_N \leq (1+\varepsilon)\int_1^N g(t)\,dt+(1+\varepsilon)\,g(q)+w_q$$

3) Montrons tout d'abord que : $\int_1^N g(t)\,dt>0$. Supposons alors que : $\int_1^N g(t)\,dt \leq 0$. Comme g est positive sur $[1,N]$, on a également : $\int_1^N g(t)\,dt \geq 0$, donc : $\int_1^N g(t)\,dt=0$, d'où g étant de signe constant sur $[1,N]$:

$\forall x \in]1,N[,\ g(x)=0$ soit, comme g est décroissante et positive sur $[c,+\infty[$ et comme $N \geq q+1 > c$:

$\forall x \in]1,+\infty[,\ g(x)=0$ d'où :

$\int_1^{+\infty} g(t)\,dt=0$.

Ainsi, l'intégrale $\int_1^{+\infty} g(t)\,dt$ converge, ce qui contredit l'une des hypothèses portant sur g. On peut donc conclure : $\int_1^N g(t)\,dt>0$.

En divisant alors par $\int_1^N g(t)\,dt>0$ dans la double inégalité du 2b, on peut écrire :

$$(1-\varepsilon)-\frac{(1-\varepsilon)\int_1^q g(t)\,dt-w_q}{\int_1^N g(t)\,dt} \leq \frac{w_N}{\int_1^N g(t)\,dt} \leq (1+\varepsilon)+\frac{(1+\varepsilon)g(q)+w_q}{\int_1^N g(t)\,dt}\ ⑥.$$

Montrons alors que la suite $\left(\int_1^n g(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$. Par définition, on peut écrire que la fonction $\Psi : x \mapsto \int_1^x g(t)\,dt$ est dérivable sur $[1,+\infty[$, et on a : $\forall x \in [1,+\infty[,\ \Psi(x)=g(x)$. Ainsi, g étant positive sur $[1,+\infty[$, Ψ est croissante sur $[1,+\infty[$.

D'après le théorème de la limite monotone, elle admet donc une limite, finie ou infinie, en $+\infty$.

De même, la suite $\left(\int_1^n g(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et admet donc une limite, finie ou infinie. Supposons alors qu'elle converge vers une limite ℓ. Comme elle est croissante, on a alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_1^n g(t)\,dt \leq \ell$.

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

De plus, comme : $\forall x \in [1,+\infty[$, $x \leq E(x)+1$, on a, Ψ étant croissante sur $[1,+\infty[$:

$\forall x \in [1,+\infty[$, $\psi(x) \leq \psi(E(x)+1)$ i.e. :

$\forall x \in [1,+\infty[$, $\int_1^x g(t)\,dt \leq \int_1^{E(x)+1} g(t)\,dt \leq \ell$ d'où, comme : $\forall x \in [1,+\infty[$, $(E(x)+1) \in \mathbb{N}^*$:

Ainsi, en faisant tendre x vers $+\infty$, d'après le théorème de prolongement des inégalités, ψ admet une limite finie en $+\infty$, donc l'intégrale $\int_1^{+\infty} g(t)\,dt$ converge, ce qui contredit l'une des hypothèses portant sur g.

Ainsi, la suite $\left(\int_1^n g(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite infinie. Comme elle est croissante, on peut donc écrire : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_1^n g(t)\,dt = +\infty$.

Comme : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_1^n g(t)\,dt = +\infty$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{(1-\varepsilon)\int_1^q g(t)\,dt - w_q}{\int_1^n g(t)\,dt} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(1+\varepsilon)g(q)+w_q}{\int_1^n g(t)\,dt} = 0.$$

Par définition de la limite d'une suite, on peut alors écrire :

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_1 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in [\![n_1,+\infty[\![, -\alpha \leq -\frac{(1-\varepsilon)\int_1^q g(t)\,dt - w_q}{\int_1^n g(t)\,dt} \leq \alpha \quad \text{et :}$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n_2 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in [\![n_2,+\infty[\![, -\alpha \leq -\frac{(1+\varepsilon)g(q)+w_q}{\int_1^n g(t)\,dt} \leq \alpha.$$

Ainsi, comme $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, on peut écrire :

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in [\![n_1,+\infty[\![, -\varepsilon \leq -\frac{(1-\varepsilon)\int_1^q g(t)\,dt - w_q}{\int_1^n g(t)\,dt} \quad \text{et :}$$

$$\exists n_2 \in \mathbb{N}^*,\ \forall n \in [\![n_2,+\infty[\![, \frac{(1+\varepsilon)g(q)+w_q}{\int_1^n g(t)\,dt} \leq \varepsilon.$$

En considérant la relation ⑥, on peut alors écrire, en posant $n_0 = \max(q+1, n_1, n_2)$:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in [\![n_0,+\infty[\![, 1-2\varepsilon \leq \frac{w_n}{\int_1^n g(t)dt} \leq 1+2\varepsilon.$$

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Cette double inégalité pour un ε quelconque dans $]0,1[$, on peut donc écrire :

$\forall \varepsilon \in]0,1[, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in [\![n_0, +\infty[\![, 1-2\varepsilon \leq \dfrac{w_n}{\int_1^n g(t)dt} \leq 1+2\varepsilon$ soit, en posant $\varepsilon' = 2\varepsilon$

$\forall \varepsilon \in]0,2[, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in [\![n_0, +\infty[\![, 1-\varepsilon \leq \dfrac{w_n}{\int_1^n g(t)dt} \leq 1+\varepsilon$ d'où ce résultat s'étendant aux cas $\varepsilon \geq 2$:

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists n_0 \in \mathbb{N}^*, \forall n \in [\![n_0, +\infty[\![, \left| \dfrac{w_n}{\int_1^n g(t)dt} - 1 \right| \leq \varepsilon$.

Par définition de la limite d'une suite, on a donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{w_n}{\int_1^n g(t)dt} = 1$. On peut finalement conclure :

$$w_n \sim \int_1^n g(t)dt$$

4) Soit g la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par : $\forall x \in [1,+\infty[, g(x) = \dfrac{1}{x}$. La fonction g est continue, positive et décroissante sur $[1,+\infty[$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} g(t)dt$ est divergente (intégrale de Riemann).

Soit alors $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$. On a :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, w_{n+1} - w_n = \dfrac{1}{n+1}$.

Comme : $\dfrac{1}{n+1} \sim \dfrac{1}{n}$, on peut donc écrire :

$w_{n+1} - w_n \sim g(n)$ et donc, d'après le résultat de la question précédente (avec c=1)

$w_n \sim \int_1^n g(t)dt$.

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Or, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_1^n g(t)dt = \int_1^n \frac{dt}{t}$ soit encore :

$= \ln n - \ln 1$ et donc, comme $\ln 1 = 0$:

$= \ln n.$

On peut donc conclure :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$$

 Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021