

Enoncés

Exercice 1

Soient $\lambda \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. Soit N la variable aléatoire égale au nombre de clients d'un marchand de fruits et légumes un jour donné. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre λ et que chaque client achète des fruits avec une probabilité p et des légumes avec une probabilité $q = 1 - p$ (on suppose que les clients ne peuvent acheter à la fois des fruits et des légumes). On suppose que les achats des différents clients sont indépendants.

Soient X la variable aléatoire égale au nombre de clients achetant des fruits et Y la variable aléatoire égale au nombre de clients achetant des légumes.

- 1) Déterminer la loi conjointe de (X, Y) .
- 2) a) Déterminer les lois marginales de X et de Y .
b) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes? En déduire $\text{cov}(X, Y)$ et $E(XY)$.

Exercice 2

Soit n un entier naturel non nul et $p \in]0, 1[$. Une secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n correspondants distincts. On admet que les appels constituent n expériences de Bernoulli indépendantes de même paramètre p . Soit X la variable aléatoire égale au nombre de correspondants obtenus.

- 1) Déterminer la loi de X , son espérance et sa variance.
- 2) La secrétaire rappelle une seconde fois, et dans les mêmes conditions, chacun des correspondants qu'elle n'a pu joindre au cours de la première série d'appels. Soient alors Y la variable aléatoire égale au nombre de personnes jointes au cours de cette seconde série d'appels et $Z = X + Y$ la variable aléatoire égale au nombre total de correspondants obtenus lors de ces deux séries d'appels.
 - a) Déterminer, pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = i]$.
 - b) Déterminer la loi de Z et montrer que Z suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

Exercice 3

Soient X une variable aléatoire à valeurs dans une partie de \mathbb{N} et A un événement de l'espace probabilisé considéré, tel que $p(A) \neq 0$.

Sous réserve d'existence, on appelle espérance de la variable aléatoire X conditionnée par l'événement A et on note $E(X/A)$ le réel défini par :

$$E(X/A) = \sum_{k \in X(\Omega)} kp([X = k]/A).$$

1) Soient X une variable aléatoire et A un événement vérifiant les hypothèses précédentes. On suppose en outre que $p(A) \neq 1$ et que X admet une espérance.

a) Montrer que $E(X/A)$ et $E(X/\bar{A})$ existent.

b) Etablir que :

$$E(X) = p(A)E(X/A) + p(\bar{A})E(X/\bar{A})$$

c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Quelle relation similaire peut-on déterminer si X admet un moment d'ordre k ?

2) Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N} prenant toutes leurs valeurs avec une probabilité non nulle. On suppose que Y admet une espérance.

a) Montrer que, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $E(Y/[X = i])$ existe.

b) Etablir que :

$$E(Y) = \sum_{i=0}^{+\infty} p(X = i)E(Y/[X = i]),$$

(on pourra inverser les deux sommes).

c) Quelle relation similaire peut-on déterminer si Y admet un moment d'ordre k ($k \in \mathbb{N}^*$)?

Exercice 4

Pour toute variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{N} , on note G_x la fonction :

$t \mapsto G_x(t) = \sum_{k \in \mathbb{N}} p(X = k)t^k$ (lorsque $X(\Omega)$ est fini, G_x est définie sur \mathbb{R} et lorsque $X(\Omega)$ est infini, G_x est au moins définie sur $[-1, 1]$).

- 1) Soient p un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $(X_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans $[[0, n]]$. En remarquant que, pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $[[0, n]]$, on a : $\forall t \in \mathbb{R}, G_x(t) = E(t^X)$, montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, G_{\sum_{i=1}^p X_i} = \prod_{i=1}^p G_{X_i}(t).$$

- 2) Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans \mathbb{N} . En remarquant que, pour toute variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{N} , on a : $\forall t \in [-1, 1], G_x(t) = E(t^X)$, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [-1, 1], G_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \prod_{i=1}^n G_{X_i}(t).$$

Correction

Exercice 1

- 1) D'après l'énoncé, on a clairement : $(X, Y)(\Omega) = \mathbb{N}^2$. De plus, comme $X+Y=N$ (chacun des clients achetant des fruits ou des légumes), on a également :

$$\begin{aligned} \forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, p([X = i] \cap [Y = j]) &= p([X = i] \cap [N - X = j]) && \text{d'où} \\ &= p([X = i] \cap [N = i + j]) && \text{soit, d'après la formule des} \\ &= p\left(X = \cancel{i} / N = i + j\right) p(N = i + j). && \text{probabilités composées :} \end{aligned}$$

Or, comme chaque client achète des fruits avec une probabilité p , pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$, sachant que le nombre total de clients N est égal à $i+j$, X suit une loi binomiale de paramètres $i+j$ et p . On peut alors écrire :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, p\left(X = \cancel{i} / N = i + j\right) = C_{i+j}^i p^i q^j.$$

De plus, comme N suit une loi de Poisson de paramètre λ , on peut également écrire :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, p(N = i + j) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!}.$$

On en déduit alors :

$$\begin{aligned} \forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, p([X = i] \cap [Y = j]) &= C_{i+j}^i p^i q^j \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!} && \text{soit :} \\ &= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \frac{(\lambda q)^j}{j!}. \end{aligned}$$

On peut désormais conclure :

$$(X, Y)(\Omega) = \mathbb{N}^2 \text{ et } \forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, p([X = i] \cap [Y = j]) = e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \frac{(\lambda q)^j}{j!}$$

- 2) a) On a : $X(\Omega) = \mathbb{N}$. Comme on a également $Y(\Omega) = \mathbb{N}$, on peut écrire :

$$\forall i \in \mathbb{N}, [X = i] = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} ([X = i] \cap [Y = j]) \quad \text{soit, en passant aux probabilités :}$$

$$\forall i \in \mathbb{N}, p(X = i) = p\left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} ([X = i] \cap [Y = j])\right)$$

soit encore, l'union étant disjointe (il ne peut y avoir simultanément un jour donné j et j' clients achetant des légumes avec $j \neq j'$) :

$$= \sum_{j \in \mathbb{N}} p([X = i] \cap [Y = j])$$

et donc, d'après les résultats de la question précédente :

$$= \sum_{j \in \mathbb{N}} e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \frac{(\lambda q)^j}{j!}$$

i.e. :

$$= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^j}{j!}$$

soit enfin, en reconnaissant la somme d'une série exponentielle :

$$= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^i}{i!} e^{\lambda q}$$

et donc :

$$= e^{-\lambda(1-q)} \frac{(\lambda p)^i}{i!}$$

d'où, comme $1-q=p$:

$$= e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^i}{i!}.$$

o X et Y munis de leurs paramètres respectifs p et q jouant des rôles symétriques, on peut également écrire : $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall i \in \mathbb{N}, p(Y = i) = e^{-\lambda q} \frac{(\lambda q)^i}{i!}$. On peut désormais conclure que X et Y suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs λp et λq , i.e. :

$$x \sim \mathcal{P}(\lambda p) \text{ et } Y \sim \mathcal{P}(\lambda q), \text{ i.e. : } X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall i \in \mathbb{N}, \begin{cases} p(X = i) = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \\ p(Y = i) = e^{-\lambda q} \frac{(\lambda q)^i}{i!} \end{cases}$$

b) o On en déduit alors :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, p(X = i) p(Y = j) = e^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \cdot e^{-\lambda q} \frac{(\lambda q)^j}{j!} \quad \text{i.e. :}$$

$$= e^{-\lambda(p+q)} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \frac{(\lambda q)^j}{j!} \quad \text{soit, comme } p+q=1 :$$

$$= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^i}{i!} \frac{(\lambda q)^j}{j!} \quad \text{i.e. :}$$

$$= p([X = i] \cap [Y = j]).$$

On peut donc conclure :

X et Y sont donc indépendantes

- o Comme X et Y sont indépendantes, on peut alors écrire :

$$\text{cov}(X, Y) = 0 \text{ et } E(XY) = E(X)E(Y).$$

Or, comme X et Y suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs λp et λq , on peut écrire : $E(X) = \lambda p$ et $E(Y) = \lambda q$, d'où la conclusion :

$\text{cov}(X, Y) = 0 \text{ et } E(XY) = \lambda^2 pq$

Exercice 2

- 1) Comme X est le nombre de correspondants obtenus, X représente le nombre de succès (obtenir un correspondant) lors de la réalisation de n essais indépendants (n coups de téléphone) d'une expérience à deux issues possibles (joindre ou ne pas joindre le correspondant) dont la probabilité de succès est p. X suit donc une loi binomiale de paramètre n et p.

On en déduit alors :

$X \sim \mathcal{B}(n, p)$, i.e. : $X(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$ et $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad p(X=k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, d'où :
 $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$

- 2) a) Pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, si $X=i$, lors de la seconde série d'appels, la secrétaire rappelle les n-i correspondants qu'elle n'a pas réussi à joindre lors de la première série, et ce dans les mêmes conditions que précédemment.

On déduit alors que si $X = i$ ($i \in \llbracket 0, n \rrbracket$), Y suit une loi binomiale de paramètres n-i et p, d'où la conclusion :

$\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, \forall k \in \llbracket 0, n-i \rrbracket, p(Y = k / X = i) = C_{n-i}^k p^k (1-p)^{n-i-k}$

- b) o Comme Z est le nombre total de correspondants joints à l'issue de la seconde série d'appels, on a clairement : $Z(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$. De plus, comme $Z=X+Y$, on a :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, [Z = k] = \bigcup_{i=0}^k ([X = i] \cap [Y = k - i]) \quad \text{d'où en passant aux probabilités :}$$

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, p(Z = k) = p\left(\bigcup_{i=0}^k ([X = i] \cap [Y = k - i])\right)$$

$$= \sum_{i=0}^k p([X = i] \cap [Y = k - i])$$

$$= \sum_{i=0}^k p\left(Y = k - i \middle| X = i\right) p(X = i)$$

$$= \sum_{i=0}^k C_{n-i}^{k-i} p^{k-i} (1-p)^{n-k} \times C_n^i p^i (1-p)^{n-i} \text{ i.e. :}$$

$$= \sum_{i=0}^k C_n^i C_{n-i}^{k-i} p^k (1-p)^{2n-k-i}$$

$$= C_n^k p^k (1-p)^{2n-2k} \sum_{i=0}^k C_k^i (1-p)^{k-i}$$

$$= C_n^k p^k (1-p)^{2n-2k} (2-p)^k$$

soit, l'union étant disjointe (on ne peut avoir simultanément $[X=i]$ et $[X=i']$ avec $i \neq i'$) :

soit encore, d'après la formule des probabilités composées :

et donc, d'après les résultats précédents :

et comme $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \forall i \in \llbracket 0, k \rrbracket,$

$$C_n^i C_{n-i}^{k-i} = C_n^k C_k^i :$$

soit encore, à l'aide de la formule du binôme de Newton :

d'où la conclusion :

$$Z(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket \text{ et } \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, p(Z=k) = C_n^k (p(2-p))^k ((1-p)^2)^{n-k}$$

o Comme $p(2-p) + (1-p)^2 = 1$, on peut maintenant écrire que Z suit une loi binomiale de paramètres n et $p(2-p)$, i.e. :

$$Z \sim \mathcal{B}(n, p(2-p))$$

Exercice 3

1) a) o On a :

$$\forall k \in X(\Omega), p\left(\frac{[X = k]}{A}\right) = \frac{p([X = k] \cap A)}{p(A)}$$

d'où comme : $p([X = k] \cap A) \leq p(X = k)$

(car $([X = k] \cap A) \subset [X = k]$) :

$$\forall k \in X(\Omega), p\left(\frac{[X = k]}{A}\right) \leq \frac{p(X = k)}{p(A)}$$

donc :

$$\forall k \in X(\Omega), 0 \leq kp\left(\frac{[X = k]}{A}\right) \leq k \frac{p(X = k)}{p(A)} .$$

Or, comme X admet une espérance, la série de terme général $kp(X=k)$ est convergente, donc comme $p(A)$ est indépendant de k , d'après les théorèmes de comparaison de séries à termes positifs, la série de terme général $kp\left(\frac{[X=k]}{A}\right)$ converge. On peut donc conclure :

$$E\left(\frac{X}{A}\right) \text{ existe}$$

◦ De même, comme : $\forall k \in X(\Omega), 0 \leq p\left(\frac{[X=k]}{A}\right) \leq \frac{p(X=k)}{p(A)}$, et comme X admet une espérance, on peut conclure :

$$E\left(\frac{X}{\bar{A}}\right) \text{ existe}$$

b) Comme X admet une espérance, on peut écrire :

$E(X) = \sum_{k \in X(\Omega)} kp(X=k)$ soit, d'après la formule des probabilités totales, la famille (A, \bar{A}) étant un système complet d'événements de probabilités non nulles :

$$= \sum_{k \in X(\Omega)} k \left(p(A)p\left(\frac{[X=k]}{A}\right) + p(\bar{A})p\left(\frac{[X=k]}{\bar{A}}\right) \right)$$

d'où comme les séries de termes généraux respectifs $kp\left(\frac{[X=k]}{A}\right)$ et $kp\left(\frac{[X=k]}{\bar{A}}\right)$ convergent (car $E\left(\frac{X}{A}\right)$ et $E\left(\frac{X}{\bar{A}}\right)$ existent) :

$$= p(A) \sum_{k \in X(\Omega)} kp\left(\frac{[X=k]}{A}\right) + p(\bar{A}) \sum_{k \in X(\Omega)} kp\left(\frac{[X=k]}{\bar{A}}\right)$$

soit finalement :

$$E(X) = p(A)E\left(\frac{X}{A}\right) + p(\bar{A})E\left(\frac{X}{\bar{A}}\right)$$

c) On montrerait, par un raisonnement analogue, que, si X admet un moment d'ordre k , alors $E\left(\frac{X^k}{A}\right)$ et $E\left(\frac{X^k}{\bar{A}}\right)$ existent, puis que :

$$E(X^k) = p(A)E\left(\frac{X^k}{A}\right) + p(\bar{A})E\left(\frac{X^k}{\bar{A}}\right)$$

- 2) a) Soit $i \in X(\Omega)$. Comme $p(X=i) \neq 0$, en substituant $[X=i]$ à A et Y à X dans le raisonnement de la question 1.a, on peut conclure :

$$\text{Pour tout } i \in X(\Omega), E\left(\frac{Y}{[X=i]}\right) \text{ existe}$$

- b) Comme Y admet une espérance et comme Y est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{N} , on a :

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} kp(Y=k) \quad \text{soit, d'après la formule des probabilités totales, la famille } (X=i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ étant un système complet d'événements tous de probabilités non nulles :}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(k \sum_{i=0}^{+\infty} p(X=i) p\left(\frac{[Y=k]}{[X=i]}\right) \right) \text{ soit, l'inversion des sommes infinies étant autorisées car } Y \text{ admet une espérance :}$$

$$= \sum_{i=0}^{+\infty} \left(p(X=i) \sum_{k=0}^{+\infty} kp\left(\frac{[Y=k]}{[X=i]}\right) \right) \text{ d'où, comme, pour tout } i \in X(\Omega), E\left(\frac{Y}{[X=i]}\right) \text{ existe:}$$

$$E(Y) = \sum_{i=0}^{+\infty} p(X=i) E\left(\frac{Y}{[X=i]}\right)$$

- c) On montrerait, par un raisonnement analogue, que, si Y admet un moment d'ordre k , alors pour tout $i \in X(\Omega)$, $E\left(\frac{Y^k}{[X=i]}\right)$ existe, puis que :

$$E(Y^k) = \sum_{i=0}^{+\infty} p(X=i) E\left(\frac{Y^k}{[X=i]}\right)$$

Exercice 4

1) Comme pour tout $t \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto t^x$ est définie en tout point de \mathbb{N} , donc en tout point de $\llbracket 0, n \rrbracket$, pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$ telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $E(t^x)$ existe, on a (théorème de transfert):

$$\forall t \in \mathbb{R}, G_x(t) = E(t^x) \quad \text{donc :}$$

$$= \sum_{k=0}^n p(X = k) t^k .$$

Or, pour toute variable aléatoire X à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$, on a également :

$$\forall t \in \mathbb{R}, G_x(t) = \sum_{k=0}^n p(X = k) t^k , \text{ donc, en reconnaissant } E(t^x), \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}, E(t^x) \text{ existe et :}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, G_x(t) = E(t^x) .$$

Montrons, par montée fine, que si les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leq i \leq p}$ à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$ sont mutuellement indépendantes, alors :

$$\forall k \in \llbracket 2, p \rrbracket, \forall t \in \mathbb{R}, G_{\sum_{i=1}^k X_i}(t) = \prod_{i=1}^k G_{X_i}(t) .$$

- Si les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leq i \leq p}$ sont mutuellement indépendantes, alors X_1 et X_2 sont indépendantes, donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, t^{x_1} et t^{x_2} sont indépendants. On peut alors écrire :

$$\forall t \in \mathbb{R}, E(t^{x_1 + x_2}) = E(t^{x_1}) E(t^{x_2}), \text{ soit: } \forall t \in \mathbb{R}, E(t^{x_1 + x_2}) = E(t^{x_1}) E(t^{x_2}) .$$

En utilisant la remarque précédente, on en déduit alors : $\forall t \in \mathbb{R}, G_{x_1 + x_2}(t) = G_{x_1}(t) G_{x_2}(t)$. La propriété est donc bien vérifiée au rang $k=2$.

- Soit $k \in \llbracket 2, p - 1 \rrbracket$ (si $p \geq 3$), supposons que : $\forall t \in \mathbb{R}, G_{\sum_{i=1}^k X_i}(t) = \prod_{i=1}^k G_{X_i}(t)$. Les variables

aléatoires $(X_i)_{1 \leq i \leq p}$ étant mutuellement indépendantes, pour tout $t \in \mathbb{R}$, les variables

aléatoires $t^{\sum_{i=1}^k X_i}$ et $t^{X_{k+1}}$ sont également indépendantes, d'où :

$$\forall t \in \mathbb{R}, E \left(t^{\sum_{i=1}^k X_i} t^{X_{k+1}} \right) = E \left(t^{\sum_{i=1}^k X_i} \right) E(t^{X_{k+1}}) \quad \text{i.e. :}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, E \left(t^{\sum_{i=1}^{k+1} X_i} \right) = E \left(t^{\sum_{i=1}^k X_i} \right) E(t^{X_{k+1}}) \text{ ce qui s'écrit encore, d'après la remarque précédente :}$$

$\forall t \in \mathbb{R}, G_{\sum_{i=1}^{k+1} X_i}(t) = G_{\sum_{i=1}^k X_i}(t) G_{X_{k+1}}(t)$ et donc, d'après l'hypothèse :

$$= \left(\prod_{i=1}^k G_{X_i}(t) \right) G_{X_{k+1}}(t) \quad \text{i.e. :}$$

$$= \prod_{i=1}^{k+1} G_{X_i}(t).$$

- Ainsi, on a bien : $\forall k \in \llbracket 2, p \rrbracket, \forall t \in \mathbb{R}, G_{\sum_{i=1}^k X_i}(t) = \prod_{i=1}^k G_{X_i}(t)$.

On peut alors conclure, pour $k=p$:

Si $(X_i)_{1 \leq i \leq p}$ est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$, alors : $\forall t \in \mathbb{R}, G_{\sum_{i=1}^p X_i}(t) = \prod_{i=1}^p G_{X_i}(t)$

- 2) Comme pour tout $t \in [-1, 1]$, l'application $x \mapsto t^x$ est définie en tout point de \mathbb{N} , pour toute variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{N} telle que, pour tout $t \in \mathbb{R}, E(t^x)$ existe, on a (théorème de transfert) : $\forall t \in [-1, 1], E(t^x) = \sum_{k=0}^{+\infty} p(X=k)t^k$.

Or, pour toute variable aléatoire X à valeurs dans \mathbb{N} , G_x est au moins définie sur $[-1, 1]$ et on peut écrire : $\forall t \in \mathbb{R}, G_x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} p(X=k)t^k$. Ainsi, la série de terme général $p(X=k)t^k$ converge absolument donc $E(t^x)$ existe et l'on a :

$$\forall t \in [-1, 1], G_x(t) = E(t^x).$$

Montrons alors par récurrence, que si les variables aléatoires $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ à valeurs dans \mathbb{N} sont mutuellement indépendantes, alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [-1, 1], G_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \prod_{i=1}^n G_{X_i}(t)$.

- Au rang $n=1$, on a clairement : $\forall t \in [-1, 1], G_{X_1}(t) = G_{X_1}(t)$. La propriété est donc bien vérifiée au rang 1.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\forall t \in [-1, 1], G_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \prod_{i=1}^n G_{X_i}(t)$.

Les variables aléatoires $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ étant mutuellement indépendantes, il est clair que pour tout

$t \in [-1, 1]$, les variables aléatoires $t^{\sum_{i=1}^n X_i}$ et $t^{X_{n+1}}$ sont indépendantes, d'où :

$$\forall t \in [-1, 1], E\left(t^{\sum_{i=1}^n X_i} t^{X_{n+1}}\right) = E\left(t^{\sum_{i=1}^n X_i}\right) E(t^{X_{n+1}}) \text{ i.e. :}$$

$$\forall t \in [-1, 1], E\left(t^{\sum_{i=1}^{n+1} X_i}\right) = E\left(t^{\sum_{i=1}^n X_i}\right) E(t^{X_{n+1}})$$

ce qui s'écrit encore, d'après la remarque

précédente :

$$\forall t \in [-1, 1], G_{\sum_{i=1}^{n+1} X_i}(t) = G_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) G_{X_{n+1}}(t)$$

et donc, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$= \left(\prod_{i=1}^n G_{X_i}(t) \right) G_{X_{n+1}}(t) \text{ i.e. :}$$

$$= \prod_{i=1}^{n+1} G_{X_i}(t).$$

- Ainsi, on a bien : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [-1, 1], G_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \prod_{i=1}^n G_{X_i}(t)$, d'où la conclusion :

Si $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes

à valeurs dans \mathbb{N} , alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [-1, 1], G_{\sum_{i=1}^n X_i}(t) = \prod_{i=1}^n G_{X_i}(t)$.