Continuité, dérivabilité

Méthode

Attention aux notations employées pour parler de fonctions :

- ne pas parler de la "fonction f(x)" : si f représente une fonction, f(x) est un nombre, défini pour une valeur donnée de x.

I. Montrer qu'une fonction est continue, dérivable, de classe C^p, de classe C^∞

1) Prouver qu'une fonction (n')est (pas) continue

■ En remarquant que la fonction est une somme, produit, quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) ou composée de fonctions non continues peut être une fonction continue.

■ Penser qu'une fonction est continue sur un intervalle **I** de $\mathbb{R}$ si, et seulement si, f est continue en tout point a de **I**. De plus, f est continue en a si, et seulement si : $\lim\limits_{x \to a} = f(x) = f(a)$.

Attention …. ne pas confondre, quand f présente un problème de continuité en a, les expressions "f est continue en a" et "f est prolongeable par continuité en a" : si f est définie en a, elle ne peut y être prolongeable par continuité.

2) Prouver qu'une fonction (n')est (pas) dérivable

■ Condition nécessaire : penser qu'une fonction ne peut être dérivable en un point que si elle est continue en ce point.

■ En remarquant que la fonction est somme, produit, quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) ou composée de fonctions dérivables. **Attention …** La somme, le produit ou le quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) ou composée de fonctions non dérivables peut être une fonction dérivable.

■ f est dérivable en x_0 si, et seulement si, la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie en x_0, ou si et seulement si $h \mapsto \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ admet une limite finie en 0.

■ On peut également, si f est dérivable sur un voisinage de x_0 privé de x_0, se ramener à la recherche d'une limite pour f'. Si f' admet une limite finie alors f est dérivable en x_0 (et même de classe C^1, voir point **3**). si f' admet une limite infinie, alors f n'est pas dérivable.

3) Montrer qu'une fonction (n')est (pas) de classe C^1

- Condition nécessaire : penser qu'une fonction f ne peut être de classe C^1 en un point que si elle est dérivable en ce point.

- En remarquant que la fonction est somme, produit, quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) ou composée de fonctions de classe C^1.

- Pour montrer que la fonction f est de classe C^1 sur un intervalle [a, b] de $\mathbb{R}$ (avec un problème en a), il suffit de montrer successivement que :

  - f est continue sur]a, b],
  - f est continue en a à droite,
  - f est de classe C^1 sur]a, b],
  - f' admet une limite finie en a à droite.

  On utilise alors le théorème de prolongement des fonctions de classe C^1 (qui permet d'éviter de chercher la limite d'un taux d'accroissement pour montrer que f est dérivable en a).

4) Montrer qu'une fonction (n')est (pas) de classe C^p

- Condition nécessaire : penser qu'une fonction f ne peut être de classe C^p en un point si l'une des dérivées $k^{ème}$ ($k \in [\![0, p]\!]$) n'est pas continue en ce point.

- En remarquant que la fonction est somme, produit, quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) ou composée de fonctions de classe C^p.

5) Montrer qu'une fonction (n')est (pas) de classe C^∞

- En remarquant que la fonction est somme, produit, quotient (dont le dénominateur ne s'annule pas) ou composée de fonctions de classe C^∞.

- On peut, si la fonction présente un problème, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction considérée est de la classe C^n ou n fois dérivable.