Continuité, dérivabilité

Enoncé

1) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$\begin{cases} h(0) = 0 \\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, h(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

a) Montrer que h est continue sur $\mathbb{R}^+$.

b) Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

c) h est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$?

2) Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la dérivée $n^{\text{ème}}$ des fonctions:

a) $x \to x^p (p \in \mathbb{N}^*)$,

b) $x \mapsto \ln x$

c) $x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

3) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que f est lipschitzienne sur I si : $\exists k \in \mathbb{R}_+^*, \forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$.

a) Montrer que toute fonction lipschitzienne sur I est continue sur I.

b) Soient a et b deux réels tels que a<b. montrer que toute fonction de classe C^1 sur [a, b] est lipschitzienne sur [a, b].

Correction

1) a) h est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que produit et composée ($x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et sin est continue sur $\mathbb{R}_+^*$) de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, on a :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, -1 \leq \sin\frac{1}{x} \leq 1$ donc en multipliant par $x^2 \geq 0$:

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, -x^2 \leq h(x) \leq x^2$.

D'après le théorème de l'encadrement, on a donc : $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 0 = h(0)$, donc h est continue en 0, ce qui permet de conclure :

$$\boxed{\text{h est continue sur } \mathbb{R}^+.}$$

b) h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que produit et composée ($x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans R_+^* et sin est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$) de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'on a :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = x\sin\frac{1}{x}$.

De même que précédemment, on obtient alors :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, -x \leq \frac{h(x)-h(0)}{x-0} \leq x$ et donc d'après le théorème de l'encadrement :.

$$\lim_{x \to 0} \frac{h(x)-h(0)}{x-0} = 0$$

Ainsi, h est dérivable en 0 (avec h'(0)=0), et l'on peut donc conclure :

$$\boxed{\text{h est dérivable sur } \mathbb{R}^+.}$$

c) On a :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, h'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$.

Comme $\lim\limits_{x \to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$ (cf. supra) et comme la fonction $x \to \cos\frac{1}{x}$ n'admet pas de limite en 0, on peut alors écrire que h' n'admet pas de limite en 0, donc n'est pas continue en 0, ce qui nous permet de conclure :

$$\boxed{\text{h n'est pas de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}^+.}$$

2) a) Soit $f_p : x \mapsto x^p$ f_p est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f_p'(x) = px^{p-1}$, d'où en raisonnant par récurrence :

$$\boxed{\forall n \in [\![1, p]\!], \forall x \in \mathbb{R}, f_p^{(n)}(x) = \frac{p!}{(p-n)!} x^{p-n} \text{ et } \forall n \in [\![p+1, +\infty[\![, \forall x \in \mathbb{R}, f_p^{(n)}(x) = 0.}$$

b) Soit $f : x \mapsto \ln x$. f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{1}{x}$, d'où, en raisonnant par récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ \ln^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}}$$

c) Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x}$. f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ et : $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, d'où en raisonnant par récurrence :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^*, f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}}$$

3) a) Soit f une fonction lipschitzienne sur I et $x_0 \in I$. On peut écrire : $\exists k \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in I, |f(x) - f(x_0)| \leq k|x - x_0|$. Or on a : $\forall k \in \mathbb{R}_+^*, \lim_{x \to x_0} k|x - x_0| = 0$ donc f est continue en x_0, et donc : f est continue sur I.

On peut maintenant conclure :

$\boxed{\text{Toute fonction lipschitzienne sur I est continue sur I}}$

b) Soit f une fonction de classe C^1 sur [a, b]. f' est continue sur [a, b], donc bornée sur ce segment. On en déduit alors : $\forall M \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in [a, b], |f'(x)| \leq M$.

or, f étant de classe C^1 sur [a, b], on peut écrire que f est continue sur [a, b] et dérivable sur]a, b[. Comme il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall t \in [a, b], |f'(t)| \leq M$, l'inégalité des accroissements finis nous permet alors d'écrire :

$\forall (x, y) \in [a, b]^2, x \neq y, \left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| \leq M$ soit en multipliant cette expression par $|x - y| > 0$:

$\forall (x, y) \in [a, b]^2, x \neq y, |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$ et donc, cette relation étant également vérifiée pour x=y :

$\forall (x, y) \in [a, b]^2, |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$.

On peut maintenant conclure :

$\boxed{\text{Toute fonction de classe } C^1 \text{ sur } [a,b] \text{ est lipschitzienne sur } [a,b]}$