Intégrales de Wallis

Enoncé

Pour tout entier naturel n, on note : $w_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt$.

1) Calculer w_0 et w_1 .

2) Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3) Montrer pour tout entier naturel n : $w_n \geq 0$.

En déduire que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

4) Soit $n \in \mathbb{N}$. A l'aide d'une intégration par parties, montrer :

$w_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, \sin^2 t \, dt$.

En déduire : $w_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} w_n$.

5) Montrer pour tout entier naturel n, en utilisant 2. et 4. :

En déduire :

$0 < \frac{n+1}{n+2} w_n \leq w_{n+1} \leq w_n$.

$w_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$

6) Montrer, en utilisant 4., que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = (n+1)w_n w_{n+1}$ est constante.

En déduire : $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE
© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Correction

1) ■ *On a :*

$w_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt$ d'où :

$$\boxed{w_0 = \frac{\pi}{2}}$$

- On a :

$w_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt$ donc :

$= [\sin]_0^{\frac{\pi}{2}}$ d'où :

$$\boxed{w_1 = 1}$$

2) ■ *On a :*

$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], 0 \leq \cos t \leq 1$ donc, en multipliant par $\cos^n t \geq 0 (n \in \mathbb{N})$:

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \cos^{n+1} t \leq \cos^n t$ d'où, en intégrant cette inégalité sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, les fonctions étant continues sur cet intervalle :

$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} t \, dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt$ d'où :

$\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} \leq w_n$.

On peut finalement conclure :

$$\boxed{\text{La suite } (w_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est décroissante}}$$

Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE
© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

3) ■ *On a :*

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \cos^n t \geq 0$ donc, par positivité de l'intégrale, la fonction $t \mapsto \cos^n t$ étant continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt \geq 0$ d'où :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, w_n \geq 0}$$

- La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant décroissante et minorée, on peut alors conclure :

$$\boxed{\text{La suite } (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}}$$

4) ■ *On a :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1} t \cdot \cos t \, dt .$$

Les fonctions $t \mapsto \cos^{n+1} t (n \in \mathbb{N})$ et $t \mapsto \sin t$ étant de classe C^1 sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on peut alors écrire, à l'aide d'une intégration par parties (on intègre $t \mapsto \cos t$, on dérive $t \mapsto \cos^{n+1} t$) :

$\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = [\cos^{n+1} t \cdot \sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \cdot \sin^2 t \, dt$ d'où, comme $\sin 0 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$:

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \cdot \sin^2 t \, dt}$$

- On a donc :

$\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \cdot (1 - \cos^2 t) \, dt$ soit encore :

$= (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^n t - \cos^{n+2} t) \, dt$ donc, par linéarité de l'intégrale :

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

$\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt - (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2} t \, dt$ i.e. :

$= (n+1)w_n - (n+1)w_{n+2}$ d'où :

$\forall n \in \mathbb{N}, (n+2)w_{n+2} = (n+1)w_n$.

On peut finalement conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} w_n}$$

5) ■ *La suite* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *étant décroissante, on a :*

$\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} \leq w_{n+1} \leq w_n$ donc, d'après le résultat de la question précédente:

$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n+1}{n+2} w_n \leq w_{n+1} \leq w_n$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto \cos^n t$ étant continue, positive et non identiquement nulle sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, w^n > 0$. On peut donc conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 0 < \frac{n+1}{n+2} w_n \leq w_{n+1} \leq w_n}$$

- La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant strictement positive, on peut alors écrire, en divisant par w_n :

$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{n+1}{n+2} \leq \frac{w_{n+1}}{w_n} \leq 1$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1$, on peut donc écrire, d'après le théorème de l'encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{w_{n+1}}{w_n} = 1$.

On peut donc conclure :

$$\boxed{w_{n+1} \sim w_n}$$

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

6) ■ *La suite* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *étant strictement positive, on peut écrire que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est également strictement positive. On peut alors écrire :*

$\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+2)w_{n+2}w_{n+1}}{(n+1)w_{n+1}w_n}$ d'où, comme : $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}w_n$:

$= 1$ et donc :

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n$.

On peut désormais conclure :

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante

- On a donc :

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0$ donc :

$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)w_{n+1}w_n = w_1 w_0$ d'où :

$\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)w_{n+1}w_n = \dfrac{\pi}{2}$ donc, comme $w_{n+1} \sim w_n$:

$(n+1)w_n^2 \sim \dfrac{\pi}{2}$ d'où, comme $n+1 \sim n$:

$nw_n^2 \sim \dfrac{\pi}{2}$ donc :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2nw_n^2}{\pi} = 1$ d'où, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ étant continue en 1 :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{2n}{\pi}}w_n = 1$ soit finalement :

$$w_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021