Nombres complexes

Enoncés

1) a) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Déterminer $\mathrm{Re}\left(\frac{1-e^{i\alpha}}{1-e^{i\beta}}\right)$ et $\mathrm{Im}\left(\frac{1-e^{i\alpha}}{1-e^{i\beta}}\right)$.

b) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Déterminer $\mathrm{Re}\left(\frac{1+e^{i\alpha}}{1+e^{i\beta}}\right)$ et $\mathrm{Im}\left(\frac{1+e^{i\alpha}}{1+e^{i\beta}}\right)$.

2) Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. Montrer qu'il existe un unique nombre complexe b avec $\mathrm{Re}(b)>0$ tel que $b^2=a$.

3) Soit x un nombre réel. Déterminer l'expression de $\cos^4 x$ et de $\sin^4 x$ en fonction des $(\cos(kx))_{1 \leq k \leq 4}$.

4) On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, une autre expression de $S_n(x)$.

5) Soit n un entier naturel. Déterminer l'ensemble des réels x solutions du système : $\begin{cases} \cos x = \cos(nx) \\ -\sin x = \sin(nx) \end{cases}$.

 Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE

Correction

1) a) ■ On a :

$$\frac{1-e^{i\alpha}}{1-e^{i\beta}}=\frac{e^{i\frac{\alpha}{2}}}{e^{i\frac{\beta}{2}}}\times\frac{e^{-i\frac{\alpha}{2}}-e^{i\frac{\alpha}{2}}}{e^{-i\frac{\beta}{2}}-e^{i\frac{\beta}{2}}}$$

donc, d'après les formules d'Euler :

$$=\frac{e^{i\frac{a}{2}}}{e^{i\frac{b}{2}}}\times\frac{-2i\sin\left(\frac{a}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{b}{2}\right)}$$

et donc :

$$=\frac{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)}e^{i\frac{a-b}{2}} \quad ①.$$

On peut alors écrire :

$$\Re e\left(\frac{1-e^{i\alpha}}{1-e^{i\beta}}\right)=\frac{\sin\left(\frac{a}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)}$$

soit encore d'après les formules trigonométriques usuelles :

$$=\frac{\sin\left(\frac{2\alpha-\beta}{2}\right)+\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

soit finalement :

$$\boxed{\Re e\left(\frac{1-e^{i\alpha}}{1-e^{i\beta}}\right)=\frac{\sin\left(\frac{2\alpha-\beta}{2}\right)}{2\sin\frac{\beta}{2}}+\frac{1}{2}}$$

■ De même, on a :

$$\mathfrak{I}_m\left(\frac{1-e^{i\alpha}}{1-e^{i\beta}}\right)=\frac{\sin\left(\dfrac{a}{2}\right)\sin\left(\dfrac{a-b}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{b}{2}\right)}$$

soit encore, d'après les formules de trigonométrie usuelles :

$$=\frac{\cos\left(\dfrac{\beta}{2}\right)-\cos\left(\dfrac{2\alpha-\beta}{2}\right)}{2\sin\left(\dfrac{\beta}{2}\right)}$$

soit finalement :

$$\boxed{\mathfrak{I}_m\left(\frac{1-e^{i\alpha}}{1-e^{i\beta}}\right)=\frac{\cos\left(\dfrac{\beta}{2}\right)-\cos\left(\dfrac{2\alpha-\beta}{2}\right)}{2\sin\dfrac{\beta}{2}}}$$

b) On a :

$$\frac{1+e^{i\alpha}}{1+e^{i\beta}}=\frac{1-e^{i(\alpha+\pi)}}{1-e^{i(\beta+\pi)}}$$

donc en substituant $\alpha+\pi$ à α et $\beta+\pi$ à β dans les résultats de la question précédente :

$$\begin{cases}\mathfrak{R}_e\left(\dfrac{1+e^{ia}}{1+e^{ib}}\right)=\dfrac{\sin\left(\dfrac{2(a+p)-(b+p)}{2}\right)}{2\sin\left(\dfrac{b+p}{2}\right)}+\dfrac{1}{2}\\[2ex] \mathfrak{I}_m\left(\dfrac{1+e^{ia}}{1+e^{ib}}\right)=\dfrac{\cos\left(\dfrac{b+p}{2}\right)-\cos\left(\dfrac{2(a+p)-(b+p)}{2}\right)}{2\sin\left(\dfrac{b+p}{2}\right)}\end{cases}$$

soit encore :

$$\begin{cases}\mathfrak{R}_e\left(\dfrac{1+e^{ia}}{1+e^{ib}}\right)=\dfrac{\sin\left(\dfrac{2a-b+p}{2}\right)}{2\sin\left(\dfrac{b+p}{2}\right)}+\dfrac{1}{2}\\[2ex] \mathfrak{I}_m\left(\dfrac{1+e^{ia}}{1+e^{ib}}\right)=\dfrac{\cos\left(\dfrac{b+p}{2}\right)-\cos\left(\dfrac{2a-b+p}{2}\right)}{2\sin\left(\dfrac{b+p}{2}\right)}\end{cases}$$

et donc, comme : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} \sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos x \\ \cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin x \end{cases}$:

$$\boxed{\mathcal{R}e\left(\frac{1+e^{i\alpha}}{1+e^{i\beta}}\right) = \frac{\cos\left(\dfrac{2\alpha-\beta}{2}\right)}{2\cos\dfrac{\beta}{2}} + \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathcal{I}m\left(\frac{1+e^{ia}}{1+e^{ib}}\right) = \left(\frac{\sin\left(\dfrac{2a-b}{2}\right)-\sin\left(\dfrac{b}{2}\right)}{2\cos\left(\dfrac{b}{2}\right)}\right)}$$

2) Soient $r \in \mathbb{R}^+$ et $\theta \in [0,2\pi[$ tels que $a=\rho e^{i\theta}$. a n'étant pas un réel négatif ou nul, on a : $\rho \neq 0$ et $\theta \neq \pi$.

□ On a :

$a=\sqrt{\rho}e^{i\frac{\theta}{2}}\sqrt{\rho}e^{i\frac{\theta}{2}}$ ①.

Deux cas se présentent alors :

- si $\theta \in [0,\pi[$. Posons alors $b=\sqrt{\rho}e^{i\frac{\theta}{2}}$. D'après ①, on a : $b^2=a$. De plus, comme $\mathcal{R}e(b)=\sqrt{\rho}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$, et comme $\frac{\theta}{2} \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, on a : $\mathcal{R}e(b)>0$.

- si $\theta \in]\pi,2\pi[$ Posons alors $b=-\sqrt{\rho}e^{i\frac{\theta}{2}}$. D'après ①, on a : $b^2=a$. De plus, comme $\mathcal{R}e(b)=-\sqrt{\rho}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$, et comme $\frac{\theta}{2} \in \left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$, on a : $\mathcal{R}e(b)>0$.

Dans tous les cas, on peut donc écrire qu'il existe un nombre complexe b de partie réelle strictement positive tel que $b^2=a$.

□ Supposons alors qu'il existe deux nombres complexes $b=\rho e^{i\theta}$ ($\rho \in \mathbb{R}^+$, $\theta \in [0,2\pi[$) et $c=\mu e^{i\lambda}$ ($\mu \in \mathbb{R}^+$, $\lambda \in [0,2\pi[$) de parties réelles strictement positives tels que $b^2=c^2=a$. b et c ayant une partie réelle strictement positive, on a : $(\rho,\mu) \in \mathbb{R}_+^*$ et : $(\theta,\lambda) \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2},2\pi\right[$. Comme $b^2=c^2$, on a : $\rho^2 e^{2i\theta}=\mu^2 e^{2i\lambda}$.

Deux nombres complexes égaux ayant le même module, on peut alors écrire : $\rho^2=\mu^2$, donc, ρ et μ étant strictement positifs : $\rho=\mu$. De plus, deux nombres complexes égaux ayant des arguments égaux à 2π près, on a $2\theta=2\lambda\,[2\pi]$, donc : $\theta=\lambda\,[\pi]$, d'où, comme $(\theta,\lambda)\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\cup\left]\frac{3\pi}{2},2\pi\right[$: $\theta=\lambda$.

b et c ayant même module et même argument, on a donc : b=c. On peut désormais conclure :

$$\boxed{\text{Il existe un unique nombre complexe } b \text{ de partie réelle strictement positive tel que } b^2=a}$$

3) A l'aide des formules d'Euler, on peut écrire :

$\cos^4 x = \left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4$ soit, en développant cette expression à l'aide de la formule du binôme :

$= \dfrac{1}{16}\left(e^{4ix}+4e^{2ix}+6+4e^{-2ix}+e^{-4ix}\right)$ soit encore, d'après les formules d'Euler :

$= \dfrac{1}{16}\left(2\cos 4x+8\cos 2x+6\right)$ soit finalement :

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ \cos^4 x=\frac{1}{8}\left(\cos 4x+4\cos 2x+3\right)}$$

4) On a :

- $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{2k\pi, k\in\mathbb{Z}\},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}=\sum_{k=0}^{n}(e^{ix})^k$ soit en remarquant la somme des termes d'une suite géométrique de raison $e^{ix}\neq 1$:

$$=\frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}}$$

soit encore, en mettant en facteur au numérateur et au dénominateur les « exponentielles moitiés » :

$$=\frac{e^{i\frac{(n+1)x}{2}}}{e^{i\frac{x}{2}}}\,\frac{e^{-i\frac{(n+1)x}{2}}-e^{i\frac{(n+1)x}{2}}}{e^{-i\frac{x}{2}}-e^{i\frac{x}{2}}}$$

i.e. :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\},\ \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = e^{i\frac{nx}{2}}\ \frac{\dfrac{e^{i\frac{(n+1)x}{2}} - e^{-i\frac{(n+1)x}{2}}}{2i}}{\dfrac{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}}{2i}}$$

soit enfin, d'après les formules d'Euler :

$$= e^{i\frac{nx}{2}}\ \frac{\sin\left[\frac{(n+1)x}{2}\right]}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

- $$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\{2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\},\ \sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n} 1$$ soit :

$$= n+1.$$

- Or, on a : $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\ \cos(kx)=\Re_e(e^{ikx})$. On en déduit alors :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R},\ S_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\cos(kx)$$ soit

$$= \sum_{k=0}^{n}\Re_e(e^{ikx})$$ soit encore, l'opérateur partie réelle étant linéaire :

$$= \Re_e\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right).$$

D'après ce qui précède, on peut alors écrire :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\},\ S_n(x) = \Re_e\left(e^{i\frac{nx}{2}}\ \frac{\sin\left[\frac{(n+1)x}{2}\right]}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)$$ i.e. :

$$= \frac{\sin\left[\frac{(n+1)x}{2}\right]}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\Re_e\left(e^{i\frac{nx}{2}}\right)$$ et donc :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{2kp, k\in\mathbb{Z}\},\ S_n(x)=\frac{\sin\left[\frac{(n+1)x}{2}\right]}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\cos\left(\frac{nx}{2}\right)$$

Or à l'aide des formules classiques de trigonométrie, on peut écrire :

$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{2kp, k\in\mathbb{Z}\},\ \sin\left[\frac{(n+1)x}{2}\right]\cos\left(\frac{nx}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[\sin\left[\frac{(2n+1)x}{2}\right]+\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right]$ et donc :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{2kp, k\in\mathbb{Z}\},\ S_n(x)=\frac{1}{2}+\frac{\sin\left[\frac{(2n+1)x}{2}\right]}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

De même, on a : $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x \in \{2kp, k\in\mathbb{Z}\},\ S_n(x)=\sum_{e}(n+1)=n+1$. On peut désormais conclure :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \begin{cases}\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{2kp, k\in\mathbb{Z}\}, S_n(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sin\left[\frac{(2n+1)x}{2}\right]}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\\ \forall x\in\{2kp, k\in\mathbb{Z}\}, S_n(x)=n+1\end{cases}}$$

5) Par unicité des parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe, on a :

$\begin{cases}\cos x=\cos(nx)\\ -\sin x=\sin(nx)\end{cases} \Leftrightarrow \cos x - i\sin x=\cos(nx)+i\sin(nx)$ soit encore :

$\Leftrightarrow e^{-ix}=e^{inx}$ donc, deux nombres complexes étant égaux, si et seulement si, ils ont le même module et le même Argument et comme : $\forall y\in\mathbb{R}, \left|e^{-iy}\right|=\left|e^{iny}\right|=1$

$\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}, nx=-x+2kp$ d'où **:**

$\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{Z}, (n+1)x=2kp$ soit finalement, comme $n+1\neq 0$ **:**

$\Leftrightarrow x\in\left\{\frac{2kp}{n+1}, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

On peut finalement conclure :

L'ensemble des réels solutions du système : $\begin{cases}\cos x=\cos(nx)\\ -\sin x=\sin(nx)\end{cases}$ est $\left\{\frac{2kp}{n+1}, k\in\mathbb{Z}\right\}$