

Recherche de puissance  $n^{\text{ème}}$ 

Soit  $M$  la matrice définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 1) a) Déterminer les réels  $\lambda$  tels que  $M - \lambda I$  ne soit pas inversible.  
 b) Pour chacune de ces valeurs de  $\lambda$ , déterminer l'ensemble des matrices  $X$  de  $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$  telles que  $MX = \lambda X$ .

- 2) Soient  $H$  et  $H'$  deux matrices réelles carrées d'ordre 4, écrites sous la forme de blocs :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & O \\ C & A \end{pmatrix} \text{ avec : } O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ et } A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}} \text{ et :}$$

$$H' = \begin{pmatrix} 1 & O \\ C' & A' \end{pmatrix} \text{ avec : } O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \text{ et } A' = (a'_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}}$$

Vérifier que :

$$HH' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C'' & AA' \end{pmatrix} \text{ avec : } C'' = C + AC'$$

- 3) Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe une matrice colonne  $U_n$  à trois lignes telle que :

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ U_n & V_n & \emptyset \end{pmatrix} \text{ avec : } V = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- 4) On considère la matrice  $W$  définie par :  $W = V - 2I_3$ .

a) Calculer  $W^2$  et  $W^3$ .

b) Calculer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $W^n$ .

c) Expliciter, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la matrice  $V^n$ .

- 5) a) Soit  $X$  l'unique matrice colonne telle que  $MX = X$  et dont la première composante vaut 1. Calculer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $M^n X$ .

b) On considère les trois suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

Déterminer, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , une expression de  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$  en fonction de  $n$ .

## Correction

1) Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $M - \lambda I_4$  est non inversible si, et seulement si, l'équation  $(M - \lambda I_4)X = 0$  admet des solutions  $X$  non nulles. Or, on a :

$$\begin{aligned}
 (M - \lambda I_4)X = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4-\lambda & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} X = 0 && \text{donc } (L_4 \leftrightarrow L_3 \leftrightarrow L_2) : \\
 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -\lambda \\ -1 & 4-\lambda & 1 & -2 \end{pmatrix} X = 0 && \text{d'où } (L_2 \leftarrow L_4 - 2L_2 \text{ et } L_3 \leftarrow 2L_3 - \lambda L_4) : \\
 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-I & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 2-I & 2I-3 & 0 \\ I+2 & (2-I)^2 & 2-I & 0 \\ -1 & 4-I & 1 & -2 \end{pmatrix} X = 0 \quad \mathbb{I}.
 \end{aligned}$$

Deux cas se présentent alors :

- Si  $\lambda = 2$ ,  $\mathbb{I}$  devient :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{I} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} X = 0 && \text{donc, en posant } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} : \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ -5x + z = 0 \\ -x + 2y + z - 2t = 0 \end{cases} && \text{d'où} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = z = 0 \\ 2y - 2t = 0 \end{cases} && \text{et donc :} \\
 &\Leftrightarrow X \in \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).
 \end{aligned}$$

Ainsi,  $M - 2I_4$  est non inversible, et l'ensemble des matrices telles que  $MX = 2X$  est Vect

$$\left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Recherche de puissances

- Si  $\lambda \neq 2$ ,  $\mathbb{I}$  devient ( $L_2 \leftarrow (2 - \lambda)L_2 - (2\lambda - 3)L_3$ ) :

$$\mathbb{I} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ -2(\lambda^2 - 2\lambda + 2) & 2(2 - \lambda)^3 & 0 & 0 \\ \lambda + 2 & (2 - \lambda)^2 & 2 - \lambda & 0 \\ -1 & 4 - \lambda & 1 & -2 \end{pmatrix} X = 0$$

La matrice précédente étant triangulaire inférieure, l'équation n'admet de solution non nulle que si l'un de ses coefficients diagonaux est nul, donc comme  $\lambda \neq 2$ , si et seulement si,  $\lambda = 1$ . Dans ce cas,  $\mathbb{I}$  devient :

$$\mathbb{I} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} X = 0 \quad \text{donc en posant } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} :$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ 3x + y + z = 0 \\ -x + 3y + z - 2t = 0 \end{cases} \quad \text{d'où}$$

$$\mathbb{I} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = -4x \\ t = -x \end{cases} \quad \text{et donc :}$$

$$\Leftrightarrow X \in \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Ainsi,  $M - I_4$  est non inversible, et l'ensemble des matrices telles que  $MX = X$  est  $\text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ .

On peut alors conclure :

**1 et 2 sont les seules valeurs de  $\lambda$  telles que  $M - \lambda I_4$  soit non inversible, et les ensembles de matrices telles que  $MX = X$  et  $MX = 2X$  sont respectivement  $\text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$  et  $\text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ .**

Recherche de puissances

2) Par définition des matrices H et H', on a :

$$\begin{aligned}
 HH' &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ b & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ c & a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a' & a_{1,1}' & a_{1,2}' & a_{1,3}' \\ b' & a_{2,1}' & a_{2,2}' & a_{2,3}' \\ c' & a_{3,1}' & a_{3,2}' & a_{3,3}' \end{pmatrix} & \text{donc :} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a + a_{1,1}a' + a_{1,2}b' + a_{1,3}c' & \sum_{k=1}^3 a_{1,k}a_{k,1}' & \sum_{k=1}^3 a_{1,k}a_{k,2}' & \sum_{k=1}^3 a_{1,k}a_{k,3}' \\ b + a_{2,1}a' + a_{2,2}b' + a_{2,3}c' & \sum_{k=1}^3 a_{2,k}a_{k,1}' & \sum_{k=1}^3 a_{2,k}a_{k,2}' & \sum_{k=1}^3 a_{2,k}a_{k,3}' \\ c + a_{3,1}a' + a_{3,2}b' + a_{3,3}c' & \sum_{k=1}^3 a_{3,k}a_{k,1}' & \sum_{k=1}^3 a_{3,k}a_{k,2}' & \sum_{k=1}^3 a_{3,k}a_{k,3}' \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Or, on a :

$$C + AC' = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \quad \text{donc :}$$

$$= \begin{pmatrix} a + a_{1,1}a' + a_{1,2}b' + a_{1,3}c' \\ a + a_{2,1}a' + a_{2,2}b' + a_{2,3}c' \\ a + a_{3,1}a' + a_{3,2}b' + a_{3,3}c' \end{pmatrix} \quad \text{et :}$$

$$AA' = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^3 a_{1,k}a_{k,1}' & \sum_{k=1}^3 a_{1,k}a_{k,2}' & \sum_{k=1}^3 a_{1,k}a_{k,3}' \\ \sum_{k=1}^3 a_{2,k}a_{k,1}' & \sum_{k=1}^3 a_{2,k}a_{k,2}' & \sum_{k=1}^3 a_{2,k}a_{k,3}' \\ \sum_{k=1}^3 a_{3,k}a_{k,1}' & \sum_{k=1}^3 a_{3,k}a_{k,2}' & \sum_{k=1}^3 a_{3,k}a_{k,3}' \end{pmatrix}$$

On peut finalement conclure :

$$HH' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C'' & AA' \end{pmatrix} \text{ où } C'' = A + AC'$$

3) Montrons par récurrence, que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe une matrice colonne  $U_n$  à trois

lignes telle que :  $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U_n & V^n \end{pmatrix}$ .

- Au rang  $n=1$ . Par définition de M, on a :  $M^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U_1 & V \end{pmatrix}$ , avec  $U_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ . La propriété est donc bien vérifiée au rang  $n=1$ .

Recherche de puissances

- Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Supposons qu'il existe une matrice colonne  $U_n$  à trois lignes telle que :

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U_n & V^n \end{pmatrix}. \text{ On a :}$$

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n M \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U_n & V^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U_1 & V \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U_n + V^n U_1 & V^n V \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U_n + V^n U_1 & V^{n+1} \end{pmatrix}.$$

donc d'après l'hypothèse de récurrence :

donc, d'après le résultat de la question précédente, en

substituant  $U_n$  à  $C$ ,  $V^n$  à  $A$ ,  $U_1$  à  $C'$  et  $V$  à  $A'$  :

d'où

Comme  $U_n + V^n U_1$  est une matrice colonne à trois lignes, on peut alors écrire, en posant  $U_{n+1} = U_n + V^n U_1$ , que la propriété est vérifiée au rang  $n+1$ .

- On peut alors conclure :

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe une matrice colonne  $U_n$  à trois lignes telle que :

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U_n & V^n \end{pmatrix}$$

4) a) Comme  $W = V - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

On peut alors écrire :

$$W^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

d'où

$$W^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

## Recherche de puissances

On a donc :

$$W^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

donc :

$$W^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4) b) Le produit de toute matrice par la matrice nulle étant nulle, on peut donc conclure :

$$\forall n \in \llbracket 3, +\infty \llbracket, W^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a de plus :

$$W^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$W^1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$W^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

c) On a :

$$V^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et :}$$

$$V = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Recherche de puissances

De plus, on a  $V=W+2I$ . Les matrices  $W$  et  $2I$  commutent (i.e.  $W(2I)=2IW$ ), on peut donc écrire, d'après la formule du binôme de Newton :

$$\forall n \in \llbracket 2, +\infty \llbracket, V^n = \sum_{k=0}^n C_n^k 2^{n-k} W^k \quad \text{donc, comme : } \forall n \in \llbracket 3, +\infty \llbracket, W^n = 0$$

$$= 2^n I + n2^{n-1} W + n(n-1)2^{n-3} W^2 \quad \text{d'où}$$

$$= \begin{pmatrix} (n+1)2^n + n(n-1)2^{n-3} & n2^{n-1} & -n2^n - n(n-1)2^{n-3} \\ n2^{n-1} & 2^n & -n2^{n-1} \\ n2^n + n(n-1)2^{n-3} & n2^{n-1} & (1-n)2^n - n(n-1)2^{n-3} \end{pmatrix}$$

Les cas  $n=0$  et  $n=1$  rejoignant le cas général, on peut alors conclure :

$$\forall n \in \mathbb{N}, V^n = \begin{pmatrix} (n+1)2^n + n(n-1)2^{n-3} & n2^{n-1} & -n2^n - n(n-1)2^{n-3} \\ n2^{n-1} & 2^n & -n2^{n-1} \\ n2^n + n(n-1)2^{n-3} & n2^{n-1} & (1-n)2^n - n(n-1)2^{n-3} \end{pmatrix}$$

5) a) Montrons par récurrence que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*, M^n X = X$ .

. Au rang  $n=1$ . D'après la définition de  $X$ , la propriété est bien vérifiée au rang  $n=1$ .

. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Supposons que :  $M^n X = X$ . On peut alors écrire, en multipliant à gauche par  $M$  :

$$M^{n+1} X = M X \quad \text{donc d'après la définition de } X : \\ = X.$$

Ainsi, la propriété est vérifiée au rang  $n+1$ .

. On peut alors conclure :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, M^n X = X.$$

b) D'après le résultat de la question 3, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U_n & V^n \end{pmatrix} \quad \text{donc, comme } X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (\text{cf. question 1b}) \quad \text{et d'après le}$$

résultat des questions 4c et 5a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_n & (n+1)2^n + n(n-1)2^{n-3} & n2^{n-1} & -n2^n - n(n-1)2^{n-3} \\ b_n & n2^{n-1} & 2^n & -n2^{n-1} \\ c_n & n2^n + n(n-1)2^{n-3} & n2^{n-1} & (1-n)2^n - n(n-1)2^{n-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

soit encore :

## Recherche de puissances

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} a_n + (n+1)2^n + n(n-1)2^{n-3} - n2^{n+1} + n2^n + n(n-1)2^{n-3} = 1 \\ b_n + n2^{n-1} - 2^{n+2} + n2^{n-1} = -4 \\ c_n + n2^n + n(n-1)2^{n-3} - n2^{n+1} + (n-1)2^n + n(n-1)2^{n-3} = -1 \end{cases} \quad \text{soit finalement :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{cases} a_n = -2^n - n(n-1)2^{n-2} + 1 \\ b_n = (4-n)2^n - 4 \\ c_n = 2^n - n(n-1)2^{n-2} - 1 \end{cases}$$