Recherche de puissance n^{ème}

Soit M la matrice définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) a) Déterminer les réels λ tels que M-λI ne soit pas inversible.

b) Pour chacune de ces valeurs de λ, déterminer l'ensemble des matrices X de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ telles que MX=λX.

2) Soient H et H' deux matrices réelles carrées d'ordre 4, écrites sous la forme de blocs :

$$H = \begin{pmatrix} 1 & O \\ C & A \end{pmatrix} \text{ avec : } O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ et } A = (a_{i,j})_{\substack{1 \le i \le 3 \\ 1 \le j \le 3}} \text{ et :}$$

$$H' = \begin{pmatrix} 1 & O \\ C' & A' \end{pmatrix} \text{ avec : } O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ C' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \text{ et } A' = (a'_{i,j})_{\substack{1 \le i \le 3 \\ 1 \le j \le 3}}$$

Vérifier que :

$$HH' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C'' & AA' \end{pmatrix} \text{ avec : } C'' = C + AC'.$$

3) Montrer que, pour tout n$\in\mathbb{N}$*, il existe une matrice colonne U_n à trois lignes telle que :

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U_n & V^n \end{pmatrix} \text{ avec : } V = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4) On considère la matrice W définie par : W=V-2I_3.

a) Calculer W^2 et W^3.

b) Calculer, pour tout n$\in\mathbb{N}$, W^n.

c) Expliciter, pour tout n$\in\mathbb{N}$, la matrice V^n.

5) a) Soit X l'unique matrice colonne telle que MX=X et dont la première composante vaut 1. Calculer, pour tout n$\in\mathbb{N}$, M^nX.

b) On considère les trois suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

Déterminer, pour tout n$\in\mathbb{N}$, une expression de a_n, b_n et c_n en fonction de n.

Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE
© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Correction

1) Soit $\lambda\in\mathbb{R}$, $M-\lambda I_4$ est non inversible si, et seulement si, l'équation $(M-\lambda I_4)X=0$ admet des solutions X non nulles. Or, on a :

$$(M-?I_4)X=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-? & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4-? & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2-? & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -? \end{pmatrix} X=0 \qquad \textbf{donc } (L_4 \leftrightarrow L_3 \leftrightarrow L_2) :$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -\lambda \\ -1 & 4-\lambda & 1 & -2 \end{pmatrix} X=0 \qquad \textbf{d'où } (L_2 \leftarrow L_4-2L_2 \text{ et } L_3 \leftarrow 2L_3-?L_4) :$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-l & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 2-l & 2l-3 & 0 \\ l+2 & (2-l)^2 & 2-l & 0 \\ -1 & 4-l & 1 & -2 \end{pmatrix} X=0 \quad \mathbb{1}.$$

Deux cas se présentent alors :

- **Si $\lambda=2$. $\mathbb{1}$ devient :**

$$\mathbb{1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} X=0 \qquad \textbf{donc, en posant } X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} :$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ -5x+z=0 \\ -x+2y+z-2t=0 \end{cases} \qquad \textbf{d'où}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=z=0 \\ 2y-2t=0 \end{cases} \qquad \textbf{et donc :}$$

$$\Leftrightarrow X\in Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Ainsi, $M-2I_4$ est non inversible, et l'ensemble des matrices telles que $MX=2X$ est $Vect\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

- **Si $\lambda \neq 2$, $\mathbb{1}$ devient** $(L_2 \leftarrow (2-\lambda)L_2 - (2\lambda - 3)L_3)$ **:**

$$\mathbb{1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ -2(\lambda^2 - 2\lambda + 2) & 2(2-\lambda)^3 & 0 & 0 \\ \lambda + 2 & (2-\lambda)^2 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & 4-\lambda & 1 & -2 \end{pmatrix} X = 0$$

La matrice précédente étant triangulaire inférieure, l'équation n'admet de solution non nulle que si l'un de ses coefficients diagonaux est nul, donc comme $\lambda \neq 2$, si et seulement si, $\lambda = 1$. Dans ce cas, $\mathbb{1}$ devient :

$$\mathbb{1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} X = 0$$

donc en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ **:**

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ 3x + y + z = 0 \\ -x + 3y + z - 2t = 0 \end{cases}$$

d'où

$$\mathbb{1} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = -4x \\ t = -x \end{cases}$$

et donc :

$$\Leftrightarrow \mathbf{X} \in Vect \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Ainsi, $M - I_4$ est non inversible, et l'ensemble des matrices telles que $MX = X$ est $Vect \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$.

On peut alors conclure :

1 et 2 sont les seules valeurs de λ telles que $M - \lambda I_4$ soit non inversible, et les ensembles de

matrices telles que $MX = X$ et $MX = 2X$ sont respectivement $Vect \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ **et** $Vect \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

2) **Par définition des matrices H et H', on a :**

$$HH' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ b & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ c & a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a' & a_{1,1}' & a_{1,2}' & a_{1,3}' \\ b' & a_{2,1}' & a_{2,2}' & a_{2,3}' \\ c' & a_{3,1}' & a_{3,2}' & a_{3,3}' \end{pmatrix} \quad \textbf{donc :}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a + a_{1,1}a' + a_{1,2}b' + a_{1,3}c' & \sum_{k=1}^{3} a_{1,k}a_{k,1}' & \sum_{k=1}^{3} a_{1,k}a_{k,2}' & \sum_{k=1}^{3} a_{1,k}a_{k,3}' \\ b + a_{2,1}a' + a_{2,2}b' + a_{2,3}c' & \sum_{k=1}^{3} a_{2,k}a_{k,1}' & \sum_{k=1}^{3} a_{2,k}a_{k,2}' & \sum_{k=1}^{3} a_{2,k}a_{k,3}' \\ c + a_{3,1}a' + a_{3,2}b' + a_{3,3}c' & \sum_{k=1}^{3} a_{3,k}a_{k,1}' & \sum_{k=1}^{3} a_{3,k}a_{k,2}' & \sum_{k=1}^{3} a_{3,k}a_{k,3}' \end{pmatrix}$$

Or, on a :

$$C + AC' = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \quad \textbf{donc :}$$

$$= \begin{pmatrix} a + a_{1,1}a' + a_{1,2}b' + a_{1,3}c' \\ a + a_{2,1}a' + a_{2,2}b' + a_{2,3}c' \\ a + a_{3,1}a' + a_{3,2}b' + a_{3,3}c' \end{pmatrix} \quad \textbf{et :}$$

$$AA' = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{3} a_{1,k}a_{k,1}' & \sum_{k=1}^{3} a_{1,k}a_{k,2}' & \sum_{k=1}^{3} a_{1,k}a_{k,3}' \\ \sum_{k=1}^{3} a_{2,k}a_{k,1}' & \sum_{k=1}^{3} a_{2,k}a_{k,2}' & \sum_{k=1}^{3} a_{2,k}a_{k,3}' \\ \sum_{k=1}^{3} a_{3,k}a_{k,1}' & \sum_{k=1}^{3} a_{3,k}a_{k,2}' & \sum_{k=1}^{3} a_{3,k}a_{k,3}' \end{pmatrix}$$

On peut finalement conclure :

$$HH' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C'' & AA' \end{pmatrix} \text{ où } C'' = A + AC'$$

3) **Montrons par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une matrice colonne U_n à trois lignes telle que :** $M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U_n & V^n \end{pmatrix}$.

- **Au rang n=1. Par définition de M, on a :** $M^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U_1 & V \end{pmatrix}$, **avec** $U_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. **La propriété est donc bien vérifiée au rang n=1.**

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

- **Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Supposons qu'il existe une matrice colonne U_n à trois lignes telle que :**

$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U_n & V^n \end{pmatrix}$. **On a :**

$$M^{n+1} = M^n M = \begin{pmatrix} 1 & O \\ U_n & V^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & O \\ U_1 & V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & O \\ U_n + V^n U_1 & V^n V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U_n + V^n U_1 & V^{n+1} \end{pmatrix}.$$

donc d'après l'hypothèse de récurrence :

donc, d'après le résultat de la question précédente, en substituant U_n à C, V^n à A, U_1 à C' et V à A' :

d'où

Comme $U_n+V^nU_1$ est une matrice colonne à trois lignes, on peut alors écrire, en posant $U_{n+1}=U_n+V^nU_1$, que la propriété est vérifiée au rang n+1.

- **On peut alors conclure :**

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, il existe une matrice colonne U_n à trois lignes telle que :

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U_n & V^n \end{pmatrix}$$

4) a) Comme $W = V - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

On peut alors écrire :

$$W^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

d'où

$$W^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

On a donc :

$$W^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ **donc :**

$$W^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4) b) Le produit de toute matrice par la matrice nulle étant nulle, on peut donc conclure :

$$\forall n \in [\![3, +\infty[\![, W^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a de plus :

$$W^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$W^1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$
$$W^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

c) On a :

$$V^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ **et :**

$$V = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

De plus, on a V=W+2I. Les matrices W et 2I commutant (i.e. W(2I)=2IW), on peut donc écrire, d'après la formule du binôme de Newton :

$$\forall n \in [\![2,+\infty[\![, V^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 2^{n-k} W^k \qquad \text{donc, comme : } \forall n \in [\![3,+\infty[\![, W^n = 0$$

$$= 2^n I + n2^{n-1} W + n(n-1)2^{n-3} W^2 \qquad \text{d'où}$$

$$= \begin{pmatrix} (n+1)2^n + n(n-1)2^{n-3} & n2^{n-1} & -n2^n - n(n-1)2^{n-3} \\ n2^{n-1} & 2^n & -n2^{n-1} \\ n2^n + n(n-1)2^{n-3} & n2^{n-1} & (1-n)2^n - n(n-1)2^{n-3} \end{pmatrix}$$

Les cas n=0 et n=1 rejoignant le cas général, on peut alors conclure :

$$\forall n \in \mathbb{N}, V^n = \begin{pmatrix} (n+1)2^n + n(n-1)2^{n-3} & n2^{n-1} & -n2^n - n(n-1)2^{n-3} \\ n2^{n-1} & 2^n & -n2^{n-1} \\ n2^n + n(n-1)2^{n-3} & n2^{n-1} & (1-n)2^n - n(n-1)2^{n-3} \end{pmatrix}$$

5) a) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $M^n X = X$.

. Au rang n=1. D'après la définition de X, la propriété est bien vérifiée au rang n=1.

. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que : $M^n X = X$. On peut alors écrire, en multipliant à gauche par M :

$M^{n+1}X = MX$ donc d'après la définition de X :
$= X$.
Ainsi, la propriété est vérifiée au rang n+1.

.On peut alors conclure :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, M^n X = X.$$

b) D'après le résultat de la question 3, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, M^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ U_n & V^n \end{pmatrix} \quad \text{donc, comme} \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{(cf. question 1b) et d'après le}$$

résultat des questions 4c et 5a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_n & (n+1)2^n + n(n-1)2^{n-3} & n2^{n-1} & -n2^n - n(n-1)2^{n-3} \\ b_n & n2^{n-1} & 2^n & -n2^{n-1} \\ c_n & n2^n + n(n-1)2^{n-3} & n2^{n-1} & (1-n)2^n - n(n-1)2^{n-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

soit encore :

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

Calcul matriciel

Recherche de puissances

$$\forall \mathbf{n}\in\mathbb{N}^*,\begin{cases} a_n + (n+1)2^n + n(n-1)2^{n-3} - n2^{n+1} + n2^n + n(n-1)2^{n-3} = 1 \\ b_n + n2^{n-1} - 2^{n+2} + n2^{n-1} = -4 \\ c_n + n2^n + n(n-1)2^{n-3} - n2^{n+1} + (n-1)2^n + n(n-1)2^{n-3} = -1 \end{cases}$$

soit finalement :

$$\forall \mathbf{n}\in\mathbb{N}^*,\begin{cases} a_n = -2^n - n(n-1)2^{n-2} + 1 \\ b_n = (4-n)2^n - 4 \\ c_n = 2^n - n(n-1)2^{n-2} - 1 \end{cases}$$

 © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021