



CONCOURS D'ADMISSION DE 1998

Option économique

Mathématiques III

Mercredi 29 avril 1998 de 8h à 12h

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*

*Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

**Exercice I**

On compare dans cet exercice les intérêts rapportés par une somme donnée placée de différentes façons possibles.

1°) Une question technique.

Dans toute cette question, on désigne par  $x$  un nombre réel positif donné.

a) On considère la fonction définie pour tout nombre réel  $t > 0$  par :

$$f(t) = t \ln \left( 1 + \frac{x}{t} \right)$$

Calculer  $f'(t)$  et  $f''(t)$ . Quel est le signe de  $f''(t)$  ?

Calculer la limite de  $f'(t)$  quand  $t$  tend vers  $+\infty$ . Quel est le signe de  $f'(t)$  ?

En déduire le sens de variation de la fonction  $f$  sur  $]0, +\infty[$ .

b) On considère la suite définie pour tout nombre entier  $n \geq 1$  par :

$$u_n = \left( 1 + \frac{x}{n} \right)^n$$

- Déduire de l'étude de  $f$  le sens de variation des suites  $(\ln(u_n))$  et  $(u_n)$ .
- Calculer la limite de la suite  $(u_n)$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .



LES  
ANNALES  
DES  
HEC

2°) Taux d'intérêt annuel et taux d'intérêt sur une fraction de l'année.

On considère une somme  $S_0$  que l'on place de différentes façons.

a) On place  $S_0$  durant une année au taux d'intérêt annuel  $r > 0$ .

De quelle somme dispose-t-on à l'issue d'une année de placement?

b) On subdivise l'année en  $n$  périodes de durées égales, et l'on place  $S_0$  durant une année à un taux d'intérêt égal à  $r/n$  pour chacune des périodes.

De quelle somme dispose-t-on à l'issue d'une année de placement?

Déterminer la limite de celle-ci lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

Comparer ces deux placements des questions a) et b), et conclure.

c) On subdivise l'année en  $n$  périodes de durées égales, et l'on place  $S_0$  durant une année à un taux d'intérêt égal à  $r_n$  pour chacune des périodes (où  $r_n$  est donc indépendant de la période considérée).

- de quelle somme dispose-t-on à l'issue d'une année de placement?

- Exprimer  $r_n$  en fonction de  $r$  et de  $n$  pour que le placement d'une somme rapporte les mêmes intérêts, que celle-ci soit placée à l'année au taux d'intérêt annuel  $r$  ou à l'année divisée en  $n$  périodes au taux d'intérêt par période  $r_n$ .

A titre d'exemple, si  $r = 12\%$ , le taux mensuel est égal à  $0,95\%$ .

3°) Taux d'intérêt annuel et taux d'intérêt instantané constant.

On considère une somme  $S_0$  que l'on place au taux d'intérêt instantané  $i > 0$ , ce qui signifie que si l'on dispose à l'instant  $t \geq 0$  de la somme  $S(t)$  (avec donc  $S(0) = S_0$ ), alors on dispose à l'instant  $t+h \geq 0$  de la somme  $S(t+h)$  où :

$$S(t+h) = S(t) \cdot [1 + ih + \varepsilon(h)]$$

où  $\varepsilon(h)$  tend vers 0 lorsque  $h$  tend vers 0.

a) Prouver que  $S$  est dérivable en  $t$ , et exprimer  $S'(t)$  en fonction de  $S(t)$  et  $i$ .

b) Etudier la fonction  $t \rightarrow \exp(-it)S(t)$ , puis en déduire l'expression de  $S(t)$  en fonction de  $S_0$ ,  $t$  et  $i$ .

c) Quelle est la somme  $S(1)$  obtenue à l'issue d'une année de placement?

Exprimer  $i$  en fonction de  $r$  pour que le placement d'une somme rapporte les mêmes intérêts, que celle-ci soit placée à l'année au taux d'intérêt annuel  $r$  ou au taux d'intérêt instantané  $i$ .

A titre d'exemple, si  $r = 12\%$ , le taux instantané est égal à  $11,33\%$ .

4°) Placements avec taux d'intérêt instantané variable.

On considère une somme  $S_0$  que l'on place au taux d'intérêt instantané  $i(t) \geq 0$  ce qui signifie que si l'on dispose à l'instant  $t \geq 0$  de la somme  $S(t)$  (avec donc  $S(0) = S_0$ ), alors on dispose à l'instant  $t+h \geq 0$  de la somme  $S(t+h)$  où :

$$S(t+h) = S(t) \cdot [1 + i(t)h + \varepsilon(h)]$$

où  $\varepsilon(h)$  tend vers 0 lorsque  $h$  tend vers 0.

On suppose la fonction  $t \rightarrow i(t)$  continue sur  $\mathbf{R}_+$  et l'on note  $I$  sa primitive s'annulant en 0.

a) Prouver que  $S$  est dérivable, et exprimer  $S'(t)$  en fonction de  $S(t)$  et de  $i(t)$ .

b) Etudier la fonction  $t \rightarrow \exp(-I(t))S(t)$ , puis en déduire l'expression de  $S(t)$  en fonction de  $S_0$  et  $I(t)$ .

c) En déduire la somme  $S(n)$  obtenue à l'issue de  $n$  années de placement dans les quatre cas suivants ( $i$  et  $a$  sont des nombres réels positifs donnés) :

1.  $i(t) = i$  (taux constant).

2.  $i(t) = i(1 + asint)$  (fluctuation autour d'un taux constant  $i$ ).

3.  $i(t) = i(1 + aexp(-t))$  (taux tendant asymptotiquement vers  $i$  sans osciller).

4.  $i(t) = i(1 + asint.exp(-t))$  (taux tendant asymptotiquement vers  $i$  en oscillant).

(On donnera à chaque fois l'allure de la courbe représentative de la fonction  $i$  sur  $\mathbf{R}_+$ , ainsi que l'expression de la primitive  $I$ ).

## Exercice II

Dans cet exercice, on désigne par  $P_n$  l'espace vectoriel des fonctions-polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ . Celui-ci est rapporté dans toute la suite à sa base canonique  $(e_0, e_1, \dots, e_n)$ , définie par  $e_0(x) = 1, e_1(x) = x, \dots, e_n(x) = x^n$ .

### 1°) Etude d'un endomorphisme de l'espace vectoriel $P_n$ .

On désigne par  $a$  un nombre entier fixé, et l'on définit, pour toute fonction-polynôme  $P$  appartenant à  $P_n$ , la fonction  $T_a P$ :

$$T_a P(x) = P(x+a).$$

- Prouver que  $T_a P$  est élément de  $P_n$ , et prouver la linéarité de l'application  $T_a$  associant à toute fonction  $P$  appartenant à  $P_n$  la fonction  $T_a P$  appartenant à  $P_n$ .
- Déterminer la matrice  $M_a$  de l'endomorphisme  $T_a$  dans la base canonique de  $P_n$ , et prouver l'inversibilité de  $M_a$  et de  $T_a$ .
- Déterminer, pour  $a \neq 0$ , la (ou les) valeur(s) propre(s)  $\lambda$  de  $T_a$  et les fonctions-polynômes  $P$  associées (qui vérifient donc  $T_a P(x) = \lambda P(x)$  pour tout nombre réel  $x$ ).

### 2°) Composition des endomorphismes $T_a, a \in \mathbb{Z}$ .

- Etant donnés des nombres entiers  $a, b$ , déterminer les endomorphismes composés  $T_a \circ T_b$  et  $T_b \circ T_a$ , et en déduire que  $(T_a)^{-1} = T_{-a}$ .
- Expliciter ainsi le carré et l'inverse de la matrice  $M_1$ .  
Ecrire en particulier la matrice  $M_1$  et son inverse dans le cas  $n = 4$ .

### 3°) Application à un problème de dénombrement.

Etant donnés deux nombres entiers naturels  $p, n$ , on désigne par  $s(p, n)$  le nombre des surjections d'un ensemble à  $p$  éléments vers un ensemble à  $n$  éléments.

(On remarquera que  $s(p, 0) = 0$  et  $s(0, n) = 0$  et l'on posera  $s(0, 0) = 1$ ).

- Déterminer en fonction de  $p$  l'expression de  $s(p, 1)$  et  $s(p, 2)$ .
- Déterminer en fonction de  $p$  l'expression de  $s(p, p)$  et de  $s(p, n)$  lorsque  $n > p$ .
- Combien y-a-t-il d'applications d'un ensemble à  $p$  éléments dans un ensemble à  $n$  éléments?
- Exprimer à l'aide de  $n, p, k$  et  $s(p, k)$  le nombre des applications d'un ensemble à  $p$  éléments dans un ensemble à  $n$  éléments dont le cardinal de l'image est égal à  $k$  (et donc  $0 \leq k \leq n$ ).
- Prouver enfin la formule suivante:

$$n^p = \sum_{k=0}^n C_n^k s(p, k).$$

En déduire l'expression de la matrice-ligne  $[s(p, 0), s(p, 1), \dots, s(p, n)] \cdot M_1$ , puis donner l'expression de  $s(p, n)$  en fonction de  $p$  et  $n$ .

*Applications:*

- Etant donnés deux ensembles  $E_p$  et  $E_n$  de cardinaux  $p$  et  $n$ , déterminer à l'aide de  $n$  et  $p$  les nombres respectifs des applications injectives, surjectives, bijectives de  $E_p$  dans  $E_n$ .
- Déterminer la valeur de l'expression suivante pour tout nombre entier naturel  $n$ :

$$\sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^{n-k} k^n.$$

### 4°) Valeur des nombres $s(p, n)$ pour $p \leq n+2$ .

On pose pour tout nombre entier naturel  $n$  et tout nombre réel  $x$ :

$$f_n(x) = (e^x - 1)^n.$$

- Exprimer  $f_n(x)$  sous forme de somme en utilisant la formule du binôme de Newton.
- Déterminer  $f_n^{(p)}(0)$  et montrer que  $f_n^{(p)}(0) = s(p, n)$  pour tout nombre entier  $p \geq 0$ .



c) Ecrire le développement limité à l'ordre 3 de  $x \rightarrow e^x - 1$  en 0, et en déduire l'expression en fonction de  $n$  des trois nombres réels  $a_n, b_n, c_n$  tels que:

$$f_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n+1} + c_n x^{n+2} + x^{n+2} \cdot \varepsilon(x)$$

où  $\varepsilon(x)$  tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers 0.

d) A l'aide de la formule de Taylor-Young écrite à l'ordre  $n+2$  en 0, donner alors la valeur des nombres  $s(p, n)$  pour  $0 \leq p \leq n+2$ .

LES  
ANNALES