ESSEC

CONCOURS D'ADMISSION DE 1998

Option économique

Mathématiques III

Mercredi 29 avril 1998 de 8h à 12h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice I

On compare dans cet exercice les intérêts rapportés par une somme donnée placée de différentes façons possibles.

1°) Une question technique.

Dans toute cette question, on désigne par x un nombre réel positif donné.

a) On considère la fonction définie pour tout nombre réel $t > 0$ par:

$$f(t) = t.\ln\left(1+\frac{x}{t}\right).$$

Calculer $f'(t)$ et $f''(t)$. Quel est le signe de $f''(t)$?
Calculer la limite de $f'(t)$ quand t tend vers $+\infty$. Quel est le signe de $f'(t)$?
En déduire le sens de variation de la fonction f sur $]0, +\infty[$.

b) On considère la suite définie pour tout nombre entier $n \geq 1$ par:

$$u_n = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n.$$

- Déduire de l'étude de f le sens de variation des suites $(\ln(u_n))$ et (u_n).
- Calculer la limite de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.

2°) Taux d'intérêt annuel et taux d'intérêt sur une fraction de l'année.
On considère une somme S_o que l'on place de différentes façons.
a) On place S_o durant une année au taux d'intérêt annuel $r > 0$.
De quelle somme dispose-t-on à l'issue d'une année de placement?
b) On subdivise l'année en n périodes de durées égales, et l'on place S_o durant une année à un taux d'intérêt égal à r/n pour chacune des périodes.
De quelle somme dispose-t-on à l'issue d'une année de placement?
Déterminer la limite de celle-ci lorsque n tend vers $+\infty$.
Comparer ces deux placements des questions a) et b), et conclure.
c) On subdivise l'année en n périodes de durées égales, et l'on place S_o durant une année à un taux d'intérêt égal à r_n pour chacune des périodes (où r_n est donc indépendant de la période considérée).
- de quelle somme dispose-t-on à l'issue d'une année de placement?
- Exprimer r_n en fonction de r et de n pour que le placement d'une somme rapporte les mêmes intérêts, que celle-ci soit placée à l'année au taux d'intérêt annuel r ou à l'année divisée en n périodes au taux d'intérêt par période r_n.

A titre d'exemple, si $r = 12\%$, le taux mensuel est égal à 0,95%.

3°) Taux d'intérêt annuel et taux d'intérêt instantané constant.
On considère une somme S_o que l'on place au taux d'intérêt instantané $i > 0$, ce qui signifie que si l'on dispose à l'instant $t \geq 0$ de la somme $S(t)$ (avec donc $S(0) = S_o$), alors on dispose à l'instant $t+h \geq 0$ de la somme $S(t+h)$ où:
$$S(t+h) = S(t).[1 + ih + h\varepsilon(h)]$$
où $\varepsilon(h)$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0.
a) Prouver que S est dérivable en t, et exprimer $S'(t)$ en fonction de $S(t)$ et i.
b) Etudier la fonction $t \to \exp(-it)S(t)$, puis en déduire l'expression de $S(t)$ en fonction de S_o, t et i.
c) Quelle est la somme $S(1)$ obtenue à l'issue d'une année de placement?
Exprimer i en fonction de r pour que le placement d'une somme rapporte les mêmes intérêts, que celle-ci soit placée à l'année au taux d'intérêt annuel r ou au taux d'intérêt instantané i.

A titre d'exemple, si $r = 12\%$, le taux instantané est égal à 11,33%.

4°) Placements avec taux d'intérêt instantané variable.
On considère une somme S_o que l'on place au taux d'intérêt instantané $i(t) \geq 0$ ce qui signifie que si l'on dispose à l'instant $t \geq 0$ de la somme $S(t)$ (avec donc $S(0) = S_o$), alors on dispose à l'instant $t+h \geq 0$ de la somme $S(t+h)$ où:
$$S(t+h) = S(t).[1 + i(t)h + h\varepsilon(h)]$$
où $\varepsilon(h)$ tend vers 0 lorsque h tend vers 0.
On suppose la fonction $t \to i(t)$ continue sur **R**+ et l'on note I sa primitive s'annulant en 0.
a) Prouver que S est dérivable, et exprimer $S'(t)$ en fonction de $S(t)$ et de $i(t)$.
b) Etudier la fonction $t \to \exp(-I(t))S(t)$, puis en déduire l'expression de $S(t)$ en fonction de S_o et $I(t)$.
c) En déduire la somme $S(n)$ obtenue à l'issue de n années de placement dans les quatre cas suivants (i et a sont des nombres réels positifs donnés):
1. $i(t) = i$ (taux constant).
2. $i(t) = i(1+ a\sin t)$ (fluctuation autour d'un taux constant i).
3. $i(t) = i(1+ a\exp(-t))$ (taux tendant asymptotiquement vers i sans osciller).
4. $i(t) = i(1+ a\sin t.\exp(-t))$ (taux tendant asymptotiquement vers i en oscillant).
(On donnera à chaque fois l'allure de la courbe représentative de la fonction i sur **R+**, ainsi que l'expression de la primitive I).

LES ANNALES

Exercice II

Dans cet exercice, on désigne par P_n l'espace vectoriel des fonctions-polynômes de degré inférieur ou égal à n. Celui-ci est rapporté dans toute la suite à sa base canonique $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$, définie par $e_0(x) = 1$, $e_1(x) = x$, ... , $e_n(x) = x^n$.

1°) Etude d'un endomorphisme de l'espace vectoriel P_n.

On désigne par a un nombre entier fixé, et l'on définit, pour toute fonction-polynôme P appartenant à P_n, la fonction T_aP:

$$T_aP(x) = P(x+a).$$

a) Prouver que T_aP est élément de P_n, et prouver la linéarité de l'application T_a associant à toute fonction P appartenant à P_n la fonction T_aP appartenant à P_n.

b) Déterminer la matrice M_a de l'endomorphisme T_a dans la base canonique de P_n, et prouver l'inversibilité de M_a et de T_a.

c) Déterminer, pour $a \neq 0$, la (ou les) valeur(s) propre(s) λ de T_a et les fonctions-polynômes P associées (qui vérifient donc $T_aP(x) = \lambda P(x)$ pour tout nombre réel x).

2°) Composition des endomorphismes T_a, $a \in \mathbb{Z}$.

a) Etant donnés des nombres entiers a, b, déterminer les endomorphismes composés $T_a \circ T_b$ et $T_b \circ T_a$, et en déduire que $(T_a)^{-1} = T_{-a}$.

b) Expliciter ainsi le carré et l'inverse de la matrice M_1.

Ecrire en particulier la matrice M_1 et son inverse dans le cas n = 4.

3°) Application à un problème de dénombrement.

Etant donnés deux nombres entiers naturels p, n, on désigne par s(p, n) le nombre des surjections d'un ensemble à p éléments vers un ensemble à n éléments.

(On remarquera que s(p, 0) = 0 et s(0, n) = 0 et l'on posera s(0, 0) = 1).

a) Déterminer en fonction de p l'expression de s(p, 1) et s(p, 2).

b) Déterminer en fonction de p l'expression de s(p, p) et de s(p, n) lorsque n > p.

c) Combien y-a-t-il d'applications d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments?

d) Exprimer à l'aide de n, p, k et s(p, k) le nombre des applications d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments dont le cardinal de l'image est égal à k (et donc $0 \leq k \leq n$).

e) Prouver enfin la formule suivante:

$$n^p = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, s(p,k).$$

En déduire l'expression de la matrice-ligne $[s(p, 0), s(p, 1), \ldots, s(p, n)].M_1$, puis donner l'expression de s(p, n) en fonction de p et n.

Applications:

i) Etant donnés deux ensembles E_p et E_n de cardinaux p et n, déterminer à l'aide de n et p les nombres respectifs des applications injectives, surjectives, bijectives de E_p dans E_n.

ii) Déterminer la valeur de l'expression suivante pour tout nombre entier naturel n:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^{n-k} k^n.$$

4°) Valeur des nombres s(p, n) pour $p \leq n+2$.

On pose pour tout nombre entier naturel n et tout nombre réel x:

$$f_n(x) = (e^x - 1)^n.$$

a) Exprimer $f_n(x)$ sous forme de somme en utilisant la formule du binôme de Newton.

b) Déterminer $f_n^{(p)}(0)$ et montrer que $f_n^{(p)}(0) = s(p, n)$ pour tout nombre entier $p \geq 0$.

c) Ecrire le développement limité à l'ordre 3 de $x \to e^x - 1$ en 0, et en déduire l'expression en fonction de n des trois nombres réels a_n, b_n, c_n tels que:

$$f_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n+1} + c_n x^{n+2} + x^{n+2}.\varepsilon(x)$$

où $\varepsilon(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0.

d) A l'aide de la formule de Taylor-Young écrite à l'ordre n+2 en 0, donner alors la valeur des nombres $s(p, n)$ pour $0 \leq p \leq n+2$.