



ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES III

Mercredi 6 Mai 1998, de 8 h à 12 h

EXERCICE I

1. a) Soit μ un paramètre réel. On considère le système d'équations

$$(1) \begin{cases} \mu x_1 + x_2 & = 0 \\ 3x_1 + \mu x_2 + 2x_3 & = 0 \\ 2x_2 + \mu x_3 + 3x_4 & = 0 \\ x_3 + \mu x_4 & = 0 \end{cases}$$

d'inconnues x_1, x_2, x_3, x_4 .

i) Montrer que ce système admet les mêmes solutions que le système

$$(2) \begin{cases} \mu x_1 + x_2 & = 0 \\ x_3 + \mu x_4 & = 0 \\ (3 - \mu^2)x_1 - 2\mu x_4 & = 0 \\ -2\mu x_1 + (3 - \mu^2)x_4 & = 0 \end{cases}$$

ii) Résoudre, en discutant suivant les valeurs de μ , le système

$$\begin{cases} (3 - \mu^2)x_1 - 2\mu x_4 & = 0 \\ -2\mu x_1 + (3 - \mu^2)x_4 & = 0 \end{cases}$$

iii) Déterminer enfin, suivant les valeurs de μ , les solutions du système (1).

b) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$



EXERCICE II

On effectue une suite de lancers d'une pièce de monnaie. On suppose que les résultats des lancers sont indépendants et que, à chaque lancer, la pièce donne face avec la probabilité p ($0 < p < 1$) et pile avec la probabilité $q = 1 - p$.

L'objet de l'exercice est l'étude du nombre de lancers nécessaires pour obtenir deux faces de suite, c'est à dire lors de deux lancers consécutifs.

On suppose donné un espace probabilisé, muni d'une probabilité P , modélisant cette expérience.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note

• U_n l'événement : on obtient 2 faces de suite, pour la première fois, aux lancers numéro n et $n + 1$,

et on pose $u_n = P(U_n)$.

Pour tout entier $n \geq 2$, on note

• A_n l'événement : les n premiers lancers ne donnent pas deux faces de suite et le n -ième lancer donne face,

• B_n l'événement : les n premiers lancers ne donnent pas deux faces de suite et le n -ième lancer donne pile,

et on pose $x_n = P(A_n)$, $y_n = P(B_n)$.

- a) Déterminer u_1 ; x_2, y_2, u_2 ; x_3, y_3, u_3 .
b) Trouver, pour $n \geq 2$, une relation simple entre x_n et u_n .
c) Pour tout $n \geq 2$ déterminer les probabilités conditionnelles

$$P(A_{n+1} / A_n), \quad P(A_{n+1} / B_n), \quad P(B_{n+1} / A_n), \quad P(B_{n+1} / B_n).$$

- d) En déduire, pour tout $n \geq 2$, les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} x_{n+1} = p y_n \\ y_{n+1} = q(x_n + y_n) \end{cases}$$

2. On suppose, dans cette question, que $p = q = \frac{1}{2}$.
a) Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ la suite de nombres entiers définie par les conditions :

$$f_0 = 1, f_1 = 1 \text{ et, pour tout entier } n \geq 0, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n.$$

Montrer que, pour tout $n \geq 2$, on a $2^n y_n = f_n$.

- b) On pose $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$. Montrer que l'on a, pour tout entier $n \geq 0$,
$$f_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}.$$

c) En déduire, pour tout entier $n \geq 2$, une expression de x_n , puis de u_n , en fonction de n, α et β .

d) Vérifier que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1$, c'est à dire que la probabilité d'obtenir deux faces de suite au bout d'un nombre fini de lancers est égale à 1.

3. On considère maintenant le cas où $p = \frac{2}{3}$. Donner, pour tout entier $n \geq 1$, une expression de u_n en fonction de n .