CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE PARIS

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES I

Vendredi 24 Avril 1998, de 8 h à 12 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l''utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'objet de ce problème est l'étude d'un algorithme d'approximation d'une racine carrée de certains éléments de $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire la construction d'une suite convergeant vers un élément dont le carré est donné.

Partie I. Algorithme de Newton dans R.

Soit a un réel strictement positif.

1) a) Donner le tableau de variation de la fonction définie, pour x élément de $\mathbb{R}_+^*$, par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right)$$

b) Justifier rapidement l'existence de la suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $x_0 = a$ et de la relation de récurrence : $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout entier naturel n.

c) Pour tout entier naturel n, établir les égalités :

$$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{1}{2x_n}(x_n - \sqrt{a})^2 \qquad \text{et} \qquad x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{1}{2x_{n+1}}(a - x_{n+1}^2)$$

d) En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sqrt{a}$.

2) a) Pour tout entier naturel n non nul, prouver les inégalités :

$$0 \leqslant x_{n+1} - \sqrt{a} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{a}}(x_n - \sqrt{a})^2$$

b) Soit b un réel strictement positif et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs vérifiant l'inégalité : $u_{n+1} \leqslant bu_n^2$ pour tout entier naturel n non nul.
Pour tout entier naturel n non nul, donner une majoration de u_n en fonction de n, b, u_1.

c) En déduire, pour tout entier n non nul, une majoration de $x_n - \sqrt{a}$ en fonction de n, x_1 et a.

3) a) En décrivant pas à pas les premières étapes de l'algorithme, que dire du résultat rendu par le programme suivant quand on l'exécute ?

```
program racine_carree ;
function rc(a,x,eps :real) :real ;
begin
if abs(x*x-a)<eps then rc :=x else begin x :=1/2*(x+a/x) ;
                                          rc :=rc(a,x,eps) ;
                                     end ;
end ;
begin
writeln(rc(2,2,1e-16)) ;
end.
```

b) On rappelle les inégalités : $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$.
Montrer que, lors de l'exécution du programme précédent, le nombre de comparaisons effectuées est inférieur ou égal à six. *On supposera le type real suffisamment étendu pour pouvoir manipuler des nombres à une précision d'au moins vingt décimales.*

Partie II. Algorithme de Newton dans $\mathbb{C}$

On se propose dans cette partie d'adapter la méthode de Newton à la recherche d'une racine carrée d'un nombre complexe a, c'est-à-dire d'approcher un nombre complexe dont le carré vaut a. Dans toute cette partie a désigne un nombre complexe qui n'est pas un réel négatif ou nul.
On note $\mathcal{R}e(z)$ la partie réelle d'un nombre complexe z.

1) a) Montrer qu'il existe un unique nombre complexe b de partie réelle strictement positive tel que $b^2 = a$.
On note $\mathcal{P}_+ = \left\{z \in \mathbb{C}, \mathcal{R}e\left(\frac{z}{b}\right) > 0\right\}$.

b) Dans cette sous-question (et uniquement ici) on suppose que $a = 2i$. Déterminer le nombre b dans ce cas particulier et représenter l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z est élément de $\mathcal{P}_+$.

2) On revient au cas général (où le complexe a n'est pas un réel négatif ou nul) et on considère l'application f définie pour tout nombre complexe z non nul par : $f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{a}{z}\right)$.
Établir l'inclusion : $f(\mathcal{P}_+) \subset \mathcal{P}_+$.

3) On considère la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $z_0 = a$ et par la relation de récurrence : $z_{n+1} = f(z_n)$ pour tout entier naturel n.
On pose également : $w_n = \frac{z_n - b}{z_n + b}$ pour tout entier naturel n.

a) Justifier l'existence des suites $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, w_n en fonction de w_{n-1}, puis, pour tout entier naturel n, w_n en fonction de w_0 et n.

4) Prouver la majoration : $|w_0| < 1$. En déduire la limite de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Partie III. Racine carrée d'une matrice.

Dans cette partie n désigne un entier naturel au moins égal à 2.

- On note $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées à coefficients réels ayant n lignes et n colonnes.
- On note $\mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices colonnes à coefficients réels ayant n lignes et une colonne.
- On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne usuelle dont on note $||.||$ la norme.
- On identifie les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ aux éléments de $\mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de telle sorte que si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ on écrira Mx pour $M\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.
- Soit A une matrice carrée à coefficients réels. On appelle racine carrée de A toute matrice B vérifiant $B^2 = A$.

A. Quelques exemples

1) Montrer que la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'admet pas de racine carrée.

2) On se propose, dans cette question, de généraliser le résultat de la question précédente.
On considère l'élément de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ suivant :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A est donc la matrice dont le coefficient en ligne i et colonne j est nul sauf si $1 \leqslant i \leqslant n-1$ et $j = i+1$ auquel cas il vaut 1.
On suppose qu'il existe une matrice B racine carrée de A et on note g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ ayant, dans la base canonique, B pour matrice.

a) L'endomorphisme g est-il bijectif ?

b) Prouver que $\operatorname{Im} g$ est stable par g (c'est-à-dire que $g(\operatorname{Im} g) \subset \operatorname{Im} g$), puis que la restriction de g à $\operatorname{Im} g$ est un automorphisme de $\operatorname{Im} g$.

c) Que vaut g^{2n} ? En déduire que la matrice A n'a pas de racine carrée.

3) Donner un exemple d'élément de $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ possédant une infinité de racines carrées.

B. Racine carrée d'une matrice symétrique strictement positive

On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle matrice symétrique strictement positive, tout élément de $\mathcal{S}_n$ dont les valeurs propres sont strictement positives. On note $\mathcal{S}_n^+$ l'ensemble des matrices symétriques réelles strictement positives. On suppose désormais que A est un élément de $\mathcal{S}_n^+$.

1) Montrer que A admet une racine carrée symétrique réelle strictement positive. *On pourra commencer par le cas où A est diagonale.*

2) Soit B et C deux racines carrées symétriques réelles strictement positives de A.

a) Justifier l'existence de deux matrices P et Q inversibles et de deux matrices diagonales D et Δ telles que : $A = P\,D^2\,{}^tP = Q\,\Delta^2\,{}^tQ$.

b) En déduire l'existence d'une matrice inversible R telle que $RD^2 = \Delta^2 R$.
Établir l'égalité : $RD = \Delta R$. *On comparera les coefficients de ligne i et de colonne j $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ de ces deux matrices.*

c) Conclure qu'il existe une unique racine carrée de A symétrique réelle strictement positive, qu'on notera $A^{1/2}$.

Jusqu'à la fin de cette partie B, on note $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de A et, pour tout entier j, $1 \leqslant j \leqslant p$, E_j le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ_j.

3) Pour tout entier j tel que $1 \leqslant j \leqslant p$ et pour tout réel x, on pose :

$$L_j(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{p} \frac{x - \lambda_i}{\lambda_j - \lambda_i}$$

a) Montrer que la famille $(L_1, L_2, \dots, L_p)$ est une base de l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré strictement inférieur à p.

b) Montrer qu'il existe un unique polynôme P à coefficients réels de degré strictement inférieur à p tel que, pour tout entier i de $\{1, 2, \dots, p\}$, $P(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$.

c) i) Pour tout entier j, $1 \leqslant j \leqslant p$, et pour tout vecteur x_j de E_j, calculer $P(A)(x_j)$ et en déduire l'égalité : $P(A)^2 = A$.

ii) Montrer que les valeurs propres de $P(A)$ sont toutes strictement positives.

iii) Conclure à l'égalité :

$$A^{1/2} = \sum_{i=1}^{p} \sqrt{\lambda_i}\; L_i(A)$$

4) **Un exemple**

On considère les éléments de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ suivants :

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad et \qquad A = \begin{pmatrix} n & -1 & \dots & \dots & -1 \\ -1 & n & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \dots & \dots & -1 & n \end{pmatrix}$$

U est donc la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1 et A celle dont le coefficient en ligne i et colonne j vaut n si $i = j$ et -1 sinon.

a) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de U et A.

b) Exprimer $A^{1/2}$ en fonction de A et I_n (matrice identité de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$).

Partie IV. Algorithme de Newton dans $\mathcal{S}_n^+$.

Dans toute cette partie on considère un élément A de $\mathcal{S}_n^+$ et une base orthonormée $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A, le vecteur propre e_i étant, pour tout entier i, $1 \leqslant i \leqslant n$, associé à la valeur propre λ_i (les réels $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ n'étant pas nécessairement distincts).

1) Soit M un élément de $\mathcal{S}_n^+$ dont $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est aussi une base de vecteurs propres. On note $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ les valeurs propres correspondantes (i.e. $Me_i = \mu_i e_i$, pour tout entier i, $1 \leqslant i \leqslant n$).

Montrer que $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est encore une base de vecteurs propres de la matrice $M' = \dfrac{1}{2}(M + M^{-1}A)$.

Pour tout entier i, $1 \leqslant i \leqslant n$, quelle relation existe-t-il entre la valeur propre μ_i' de M' associée à e_i et μ_i ?

2) a) Déduire de la question précédente qu'il est possible de définir une suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{S}_n^+$ telle que : $A_0 = A$ et, pour tout entier naturel k, $A_{k+1} = \dfrac{1}{2}\left(A_k + A_k^{-1}A\right)$.

b) Pour tout entier i, $1 \leqslant i \leqslant n$, on note $\lambda_{i,k}$ la valeur propre de A_k associée à e_i.

Étudier, pour tout entier i, $1 \leqslant i \leqslant n$, la convergence de la suite $(\lambda_{i,k})_{k\in\mathbb{N}}$.

3) On dit qu'une suite $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ converge vers la matrice M de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ s'il existe une base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que, pour tout entier i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $\lim\limits_{k\to+\infty} \|M_k\varepsilon_i - M\varepsilon_i\| = 0$.

Montrer que la suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $A^{1/2}$.