www.KlubPrepa.net
l'internet dédié aux prépas HEC

Chambre de Commerce et d'Industrie de Lyon

École Supérieure de Commerce de Lyon

CONCOURS D'ENTRÉE 1999

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option scientifique)

Jeudi 6 mai 1999 de 8 heures à 12 heures

Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

LES ANNALES

PREMIER PROBLÈME

Notations :

- n désigne un entier supérieur ou égal à 3 .
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels .
- On identifie les matrices unicolonnes $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ d'ordre n avec les vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
- $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique noté $\langle \, . \, , \, . \, \rangle$ défini par :

  si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, alors $\langle X \, , \, Y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$.

  En identifiant les matrices de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ avec les réels, on a : $\langle X \, , \, Y \rangle = {}^t X Y$.
- I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- A_n est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le terme général $a_{i,j}$ est égal à 1 si $|i-j| = 1$ et égal à 0 sinon.

  Ainsi, par exemple, $A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A_3 est diagonalisable.

   Déterminer une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A_3 = P D P^{-1}$.

Des méthodes, des exercices, des corrigés sur le www.KlubPrepa.net

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

www.KlubPrepa.net
l'internet dédié aux prépas HEC

2. Soit $\theta \in]0;\pi[$. On désigne par S_θ l'ensemble des suites réelles $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que $s_0 = 0$ et pour tout entier naturel k, $s_{k+2} - 2\cos\theta\ s_{k+1} + s_k = 0$.

Montrer que, si la suite $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ appartient à S_θ, alors pour tout entier naturel k : $s_k = s_1 \dfrac{\sin k\theta}{\sin\theta}$.
En déduire que S_θ est un espace vectoriel réel de dimension 1.

3. Soit λ une valeur propre réelle de A_n et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ un vecteur propre (non nul) associé à λ.

On note m le plus grand des réels $|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|$.

a. Montrer : $\begin{cases} \bullet\ \lambda x_1 = x_2 \\ \bullet\ \forall k \in \{2,\cdots,n-1\},\ \lambda x_k = x_{k-1} + x_{k+1} \\ \bullet\ \lambda x_n = x_{n-1} \end{cases}$.

Montrer pour tout entier k de $\{1,\cdots,n\}$: $|\lambda|\,|x_k| \leqslant 2m$, et en déduire : $|\lambda| \leqslant 2$.

b. On suppose $|\lambda| < 2$.
Montrer qu'il existe un unique $\theta \in]0;\pi[$ tel que $\lambda = 2\cos\theta$.
Montrer que la suite $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de S_θ déterminée par $s_1 = x_1$ vérifie :

$$\begin{cases} \bullet\ \forall k \in \{1,2,\cdots,n\},\ s_k = x_k \\ \bullet\ s_{n+1} = 0 \end{cases}$$

En déduire qu'il existe un entier p de $\{1,2,\cdots,n\}$ tel que $\theta = \dfrac{p\pi}{n+1}$.

Pour tout entier p de $\{1,2,\cdots,n\}$, on note $\theta_p = \dfrac{p\pi}{n+1}$, $\lambda_p = 2\cos\theta_p$ et $X_p = \begin{pmatrix} \sin\theta_p \\ \sin 2\theta_p \\ \vdots \\ \sin n\theta_p \end{pmatrix}$.

c. Soit $p \in \{1,2,\cdots,n\}$. Montrer que λ_p est valeur propre de A_n et que X_p est un vecteur propre associé à λ_p .

d. Montrer que $\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n\}$ est l'ensemble de toutes les valeurs propres de A_n et que $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

4. Soit U_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de terme général $u_{p,q} = \sin\dfrac{pq\pi}{n+1}$, $(p,q) \in \{1,2,\cdots,n\}^2$.
Montrer que U_n est inversible et déterminer la matrice D_n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $D_n = U_n^{-1} A_n U_n$.

5.a. Montrer pour tout couple (p,q) de $\{1,2,\cdots,n\}^2$: $\lambda_p\,{}^tX_pX_q = \lambda_q\,{}^tX_pX_q$.
En déduire que la base $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ est orthogonale et que, pour tout couple (p,q) de $\{1,2,\cdots,n\}^2$ tel que $p \neq q$, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin k\theta_p\ \sin k\theta_q = 0$.

b. Montrer, pour tout p de $\{1,2,\cdots,n\}$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos 2k\theta_p = 0$.

En déduire que, pour tout entier p de $\{1,2,\cdots,n\}$, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin^2 k\theta_p = \frac{n+1}{2}$.

c. En déduire : $U_n^2 = \dfrac{n+1}{2} I_n$, puis $A_n = \dfrac{2}{n+1} U_n D_n U_n$.

LES ANNALES

Des méthodes, des exercices, des corrigés sur le www.KlubPrepa.net

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

www.KlubPrepa.net
l'internet dédié aux prépas HEC

DEUXIÈME PROBLÈME

On considère l'application $f : [0;1[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout réel t de $[0;1[$, par :

$$f(t) = \begin{cases} -\dfrac{\ln(1-t)}{t} & \text{si } t \in]0;1[\\ 1 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

1.a. Montrer que f est continue sur $[0;1[$.

b. Montrer que f est de classe C^1 sur $]0;1[$ et calculer $f'(t)$ pour tout réel t de $]0;1[$.

c. Etablir que $f'(t)$ tend vers $\dfrac{1}{2}$ lorsque t tend vers 0, et que f est de classe C^1 sur $[0;1[$.

d. Montrer, pour tout réel t de $[0;1[$: $\quad \ln(1-t) + \dfrac{t}{1-t} \geqslant 0$.

e. Dresser le tableau de variation de f. On précisera la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers 1.

f. Tracer l'allure de la courbe représentative de f. (On n'étudiera pas la dérivée seconde de f, et on admettra que f est convexe.)

2.a. Montrer que, pour tout réel x de $[0;1]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ existe. (On distinguera les cas $x \in [0;1[$ et $x = 1$.)

On note $g : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout réel x de $[0;1]$, par :

$$g(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

b. Montrer que g est continue sur $[0;1]$, de classe C^2 sur $[0;1[$ et calculer $g'(x)$ pour tout réel x de $[0;1[$.

c. Etablir que $\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 1.

d. Dresser le tableau de variation de g. On admettra qu'une valeur approchée de $g(1)$ à 10^{-2} près est : 1,65.

e. Etablir que g est convexe sur $[0;1[$.

f. Tracer l'allure de la courbe représentative de g. On précisera les demi-tangentes aux points d'abscisses 0 et 1.

3.a. Justifier que, pour tout réel t de $[0;1[$, la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} t^n$ converge.

Quelle est sa somme ?

LES ANNALES

Des méthodes, des exercices, des corrigés sur le www.KlubPrepa.net

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021

www.KlubPrepa.net
l'internet dédié aux prépas HEC

On note, pour tout entier naturel n, $R_n : [0;1[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par:

$$\forall t \in [0;1[,\ R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} t^k .$$

b. Montrer, pour tout entier naturel n et tout réel t de $[0;1[$: $R_n(t) = \dfrac{t^{n+1}}{1-t}$ et en déduire que, pour tout entier naturel n, R_n est continue sur $[0;1[$.

c. Etablir, pour tout entier naturel n et tout réel x de $[0;1[$:

$$\int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x R_n(t)\,dt.$$

d. Montrer, pour tout entier naturel n et tout réel x de $[0;1[$:

$$0 \leqslant \int_0^x R_n(t)\,dt \leqslant \frac{x}{(n+2)(1-x)} .$$

e. Démontrer que, pour tout réel x de $[0;1[$, la série numérique $\sum_{k\geqslant 0} \dfrac{x^{k+1}}{k+1}$ est convergente et que :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k+1} .$$

4.a. Montrer que, pour tout réel x de $[0;1]$, la série numérique $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{x^n}{n^2}$ est convergente.

On note, pour tout entier naturel n, $\rho_n : [0;1[\longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall t \in [0;1[,\ \rho_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{t^k}{k+1} .$$

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, ρ_n est continue sur $[0;1[$.

c. Etablir, pour tout entier naturel n et tout réel x de $[0;1[$:

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} + \int_0^x \rho_n(t)\,dt .$$

d. Démontrer, pour tout entier naturel n et tout réel t de $[0;1[$:

$$0 \leqslant \rho_n(t) \leqslant \frac{1}{(n+2)(1-t)} .$$

e. En déduire que, pour tout entier naturel n et tout réel x de $[0;1[$:

$$0 \leqslant \int_0^x \rho_n(t)\,dt \leqslant \frac{-\ln(1-x)}{n+2} .$$

f. Conclure que, pour tout réel x de $[0;1[$: $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n^2}$.

LES ANNALES

Des méthodes, des exercices, des corrigés sur le www.KlubPrepa.net

Fichier généré pour Visiteur (), le 31/05/2021