CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et Concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P. - E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION SCIENTIFIQUE

MATHEMATIQUES II

Mardi 16 Mai 2000, de 8h. à 12h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Le problème consiste en l'analyse d'un algorithme de tri et l'étude de sa complexité.

On note $\ln x$ le logarithme népérien d'un réel strictement positif x et $\log_2 x$ son logarithme en base 2. On rappelle que $\log_2 x = \dfrac{\ln x}{\ln 2}$.

Partie I : Étude d'une suite réelle

Dans cette partie la lettre n désignera toujours un entier naturel **au moins égal** à 2.

On considère la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définie par son premier terme u_1 et vérifiant, pour tout n, la relation de récurrence : $u_n = n - 1 + \dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} u_i$.

1) a) Calculer u_2 et u_3 en fonction de u_1.
   b) Montrer que, pour tout n au moins égal à 3, on a : $nu_n - (n+1)u_{n-1} = 2n - 2$.

2) Pour tout entier naturel k non nul, on pose : $v_k = \dfrac{u_k}{k+1}$.
   a) Pour tout n au moins égal à 3, exprimer $v_n - v_{n-1}$ en fonction de n.
   b) Déterminer deux réels α et β vérifiant, pour tout réel x non nul et distinct de -1, l'égalité :
$$\frac{2x-2}{x(x+1)} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x+1}$$
   c) Pour tout n, établir l'égalité : $v_n = 2\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} + \frac{u_1}{3} - 2 + \frac{4}{n+1}$.

3) Pour tout n, on pose $h_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}$ et $z_n = \dfrac{1}{n} - \ln(\dfrac{n}{n-1})$.
   a) Calculer u_n en fonction de h_n, u_1 et n.
   b) Prouver l'égalité : $h_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} z_k + \ln n$.
   c) Déterminer la nature de la série de terme général z_n.
   d) En déduire un équivalent de h_n quand n tend vers l'infini.
   e) Déterminer un équivalent de u_n quand n tend vers l'infini.

Partie II : Étude d'une suite de variables aléatoires

A. On considère un espace probabilisé dont la probabilité est notée $\mathbf{P}$, une variable aléatoire Z, définie sur cet espace, prenant un nombre fini de valeurs réelles notées $z_1, z_2, \ldots, z_p$ et un événement A de probabilité non nulle.

On note $\mathbf{E}(Z/A)$ l'espérance de la variable aléatoire Z pour la probabilité conditionnelle sachant A, *i.e.*

$$\mathbf{E}(Z/A) = \sum_{i=1}^{p} z_i\,\mathbf{P}([Z = z_i]/A)$$

Soit $(A_1, A_2, \ldots, A_q)$ un système complet d'événements tous de probabilité non nulle. Prouver l'égalité :

$$\mathbf{E}(Z) = \sum_{j=1}^{q} \mathbf{P}(A_j)\,\mathbf{E}(Z/A_j)$$

B. Toutes les variables aléatoires considérées dans cette sous-partie sont définies sur un même espace probabilisé dont la probabilité est notée $\mathbf{P}$.

On considère une suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires telle que, pour tout n non nul, I_n suit la loi uniforme sur l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ des entiers compris, au sens large, entre 1 et n.

D'autre part, on considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires ayant les propriétés suivantes :

- X_1 est la variable constante égale à 0
- pour tout entier naturel n au moins égal à 2, les lois conditionnelles de X_n sachant $[I_n = 1]$ et de X_n sachant $[I_n = n]$ sont toutes deux égales à la loi de $n - 1 + X_{n-1}$
- pour tout entier naturel n au moins égal à 3 et tout entier i tel que $2 \leqslant i \leqslant n-1$, la loi conditionnelle de X_n sachant $[I_n = i]$ est égale à la loi de $n - 1 + Z_{n,i} + T_{n,i}$ où $Z_{n,i}$ et $T_{n,i}$ sont deux variables aléatoires **indépendantes**, $Z_{n,i}$ ayant même loi que X_{i-1} et $T_{n,i}$ ayant même loi que X_{n-i}.

Par exemple, on a :

$\mathbf{P}([X_6 = 9]/[I_6 = 1]) = \mathbf{P}([X_5 = 4])$ et aussi $\mathbf{P}([X_6 = 9]/[I_6 = 3]) = \mathbf{P}([Z_{6,3} + T_{6,3} = 4])$ ce qui, compte tenu des hypothèses, s'écrit : $\mathbf{P}([X_6 = 9]/[I_6 = 3]) = \sum_j \mathbf{P}([X_2 = j])\mathbf{P}([X_3 = 4 - j])$, la somme étant étendue aux valeurs convenables de l'entier j.

1) a) Montrer que X_2 est une variable aléatoire presque sûrement constante égale à 1.

b) Établir les égalités : $\mathbf{P}([X_3 = 2]) = \dfrac{1}{3}$ et $\mathbf{P}([X_3 = 3]) = \dfrac{2}{3}$. Calculer l'espérance de X_3 qu'on notera U_3.

2) Déterminer la loi de X_4 et calculer son espérance qu'on notera U_4.

3) En procédant par récurrence, montrer que, pour tout entier naturel n non nul, X_n prend, presque sûrement, des valeurs entières inférieures ou égales à $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

4) Soit n un entier naturel au moins égal à 2. On note U_n l'espérance de X_n.

a) À l'aide des résultats de la sous-partie **A**, établir l'égalité : $U_n = n - 1 + \dfrac{2}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} U_i$.

b) À l'aide de la partie **I**, donner l'expression de U_n en fonction de n ainsi qu'un équivalent de U_n quand n tend vers l'infini.

5) Pour tout entier naturel n non nul, on note α_n la plus petite valeur (entière) prise par la variable X_n avec une probabilité non nulle.

a) Soit n et k deux entiers naturels, l'entier n étant au moins égal à 3.

Montrer que $\mathbf{P}\Big([X_n = k]\Big)$ est nul si et seulement si les nombres $\mathbf{P}\Big([n - 1 + X_{n-1} = k]\Big)$ et $\mathbf{P}\Big([n - 1 + Z_{n,i} + T_{n,i} = k]\Big)$ (l'entier i variant de 2 à $n-1$) sont nuls.

En déduire que α_n est au moins égal au minimum des nombres $n - 1 + \alpha_{n-1}$, $n - 1 + \alpha_1 + \alpha_{n-2}$, $n - 1 + \alpha_2 + \alpha_{n-3}$, $\ldots$, $n - 1 + \alpha_{n-2} + \alpha_1$.

b) On considère la fonction g définie, pour tout x strictement positif, par $g(x) = x\log_2 x - 2x + 2$.

i) Montrer que g est convexe. Pour tout couple d'entiers (i, n) tel que $2 \leqslant i \leqslant n-1$, en déduire l'inégalité : $g(i) + g(n + 1 - i) \geqslant 2g\Big(\dfrac{n+1}{2}\Big)$.

ii) Pour tout entier naturel n non nul, établir l'inégalité : $g(n+1) - g(n) \leqslant \log_2(n+1)$. En traitant à part les cas $n = 1$ et $n = 2$, montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $g(n+1) - g(n) \leqslant n - 1$.

6) En procédant par récurrence, établir, pour tout entier naturel n non nul, l'inégalité :

$$\alpha_n \geqslant (n+1)\log_2(n+1) - 2n$$

Partie III : Étude d'un algorithme de tri

A. On considère un entier naturel n non nul et un ensemble $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ où $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sont des réels vérifiant $e_1 < e_2 < \ldots < e_n$. On munit l'ensemble des permutations de E de la probabilité **uniforme** notée $\mathbf{P}$. On considère les n variables aléatoires $T_1, T_2, \ldots, T_n$ qui, à toute permutation σ de E, associent les images des éléments de E par σ, *i.e.* $T_1(\sigma) = \sigma(e_1)$, $T_2(\sigma) = \sigma(e_2)$, ..., $T_n(\sigma) = \sigma(e_n)$, et on note T le vecteur aléatoire $(T_1, T_2, \ldots, T_n)$. Pour toute liste $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ d'éléments **distincts** de E on a donc

$$\mathbf{P}\Big([T = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)]\Big) = \frac{1}{n!}$$

1) Déterminer la loi de la variable aléatoire T_1.

2) On suppose n au moins égal à 2. Pour toute permutation σ de E on note $T_1'(\sigma)$ le premier élément de la liste $\Big(\sigma(e_1), \sigma(e_2), \ldots, \sigma(e_n)\Big)$ inférieur à $\sigma(e_1) = T_1(\sigma)$ si un tel élément existe et $T_1'(\sigma) = 0$ sinon, $T_2'(\sigma)$ le deuxième élément inférieur à $\sigma(e_1)$ si un tel deuxième élément existe et $T_2'(\sigma) = 0$ sinon, etc., $T_{n-1}'(\sigma)$ le $(n-1)$-ième élément inférieur à $\sigma(e_1)$ si un tel $(n-1)$-ième élément existe et $T_{n-1}'(\sigma) = 0$ sinon.
Par exemple, si
$n = 4$, $(e_1, e_2, e_3, e_4) = (3, 5, 7, 10)$ et $(\sigma(e_1), \sigma(e_2), \sigma(e_3), \sigma(e_4)) = (7, 10, 5, 3)$
alors $T_1'(\sigma) = 5$, $T_2'(\sigma) = 3$ et $T_3'(\sigma) = 0$.
Soit k un entier vérifiant $1 \leqslant k \leqslant n-1$.
a) Combien y a-t-il de listes $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ d'entiers vérifiant $2 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$?
b) Soit $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ une liste d'éléments **distincts** de $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$. Établir l'égalité :

$$\mathbf{P}\Big(\bigcap_{j=1}^{k} [T_j' = \alpha_j] \cap [T_1 = e_{k+1}]\Big) = \frac{1}{n\,k!}$$

c) En déduire l'égalité :

$$\mathbf{P}\Big(\bigcap_{j=1}^{k} [T_j' = \alpha_j] \,/\, [T_1 = e_{k+1}]\Big) = \frac{1}{k!}$$

où $\mathbf{P}\Big(A \,/\, B\Big)$ désigne la probabilité conditionnelle de A sachant B.
Ainsi la loi conditionnelle de $(T_1', T_2', \ldots, T_k')$ sachant $[T_1 = e_{k+1}]$ est uniforme.

B. Dans un programme écrit en langage Pascal on fait les déclarations suivantes :

```
const    n = «entier naturel non nul fixé par l'utilisateur» ;
type tableau = array [1..n] of integer ;
```

Soit T une variable de type tableau qu'on suppose constituée d'éléments distincts. Si deb et fin sont deux entiers tels que $1 \leqslant deb < fin \leqslant n$ on dira qu'un élément $T[k]$ de la liste $(T[deb], T[deb+1], \ldots, T[fin])$ est **à sa place dans le sous-tableau** $\Big[T[deb], \ldots, T[fin]\Big]$ si les éléments $T[deb], T[deb+1], \ldots, T[k-1]$ sont inférieurs à $T[k]$ et si les éléments $T[k+1], T[k+2], \ldots, T[fin]$ sont supérieurs à $T[k]$ (bien sûr, si $k = deb$ ou $k = fin$, une seule de ces conditions subsiste).
Ainsi, si $n = 4$ et $T = [3, 1, 7, 5]$ alors $T[3]$ $(=7)$ est à sa place dans le sous-tableau $\Big[T[1], T[2], T[3]\Big]$ $(= [3, 1, 7])$ mais n'est pas à sa place dans le le sous-tableau $\Big[T[2], T[3], T[4]\Big]$ $(= [1, 7, 5])$.
On dira que le tableau T est **trié** si chacun de ses éléments est à sa place dans T.
On suppose qu'on dispose d'une procédure (écrite en langage Pascal) dont l'en-tête est

$Placer$(**var** T : tableau ; deb, fin : **integer** ; **var** pl : **integer**);

qui ne fait rien si $fin \leqslant deb$ et qui, si $1 \leqslant deb < fin \leqslant n$, effectue, **à l'aide de** $(fin - deb)$ **comparaisons**, les opérations suivantes :

i) d'une part, elle ne modifie que le sous-tableau $\Big[T[deb], \ldots, T[fin]\Big]$ de sorte que les éléments de ce sous-tableau plus petits que $T[deb]$ «ont glissé» (sans permutation entre-eux) à gauche de $T[deb]$ et les éléments de ce sous-tableau plus grands que $T[deb]$ «ont glissé» (sans permutation entre-eux) à droite de $T[deb]$.
Ainsi $T[deb]$ se retrouve à sa place dans le sous-tableau modifié.

ii) d'autre part, elle met dans la variable pl l'indice i tel que $T[i]$ reçoit, au cours de la procédure, la valeur qui était stockée dans $T[deb]$ avant l'exécution de la procédure.

Par exemple, si $T = [12, 3, 8, 10, 6, 4, 5]$ l'instruction $Placer(T, 3, 6, pl)$ une fois exécutée aura changé T en $[12, 3, 6, 4, 8, 10, 5]$ et affecté la valeur 5 à la variable pl, alors que l'instruction $Placer(T, 3, 4, pl)$ aura laissé T inchangé et affecté la valeur 3 à la variable pl.

Par ailleurs on considère la procédure suivante :

```
procedure   Tri ( var T : tableau ; deb, fin : integer ) ;
var pl : integer ;
begin
      if fin > deb   then   begin  Placer(T, deb, fin, pl) ;
                                   if  pl > deb  then  Tri(T, deb, pl - 1) ;
                                   if  pl < fin  then  Tri(T, pl + 1, fin) ;
                             end ;
end ;
```


1) a) L'entier i étant compris entre 1 et n, quel est l'effet sur la variable T de l'instruction $Tri(T, i, i)$?

b) Dans cette sous-question on suppose qu'initialement $T = [2, 9, 6, 1, 5]$.
Déterminer la «trace» de l'instruction $Tri(T, 1, 5)$ en donnant la liste des procédures successives (avec les valeurs de leurs paramètres) qui sont effectuées et en indiquant à chaque fois les affectations des variables pl et T.

c) Expliquer succinctement l'effet et le principe de fonctionnement de la procédure Tri en indiquant, en particulier, pourquoi l'algorithme s'arrête.

2) On se place à nouveau dans le contexte probabiliste de la sous-partie **A** et, si σ est une permutation de E, on affecte la valeur $[\sigma(e_1), \sigma(e_2), \dots \sigma(e_n)]$ à la variable T de type tableau, *i.e.* $T[1] := \sigma(e_1)$, $T[2] := \sigma(e_2), \dots$, $T[n] := \sigma(e_n)$. On note $X_n(\sigma)$ le nombre de comparaisons faites lors des différentes exécutions de la procédure $Placer$ (**et seulement au cours de celles-ci**) quand on effectue la procédure $Tri(T, 1, n)$.

a) À l'aide de la sous-partie **A**, montrer que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie les hypothèses de **II.B**. En déduire un équivalent de l'espérance de X_n lorsque l'entier naturel n tend vers l'infini.

b) Dans le cas où $E = \{1, 2, \dots, n\}$, donner (en le commentant de manière succincte) un exemple de tableau nécessitant $\dfrac{n(n-1)}{2}$ comparaisons pour être trié.

c) Dans le cas où $E = \{1, 2, \dots, 7\}$, donner de même un exemple de tableau nécessitant 10 comparaisons pour être trié.

d) Déterminer une suite d'entiers n pour lesquels, dans le cas où $E = \{1, 2, \dots, n\}$, il existe un tableau d'éléments nécessitant $g(n+1)$ comparaisons pour être trié.