LES ANNALES

ASSEMBLEE DES CHAMBRES FRANCAISES DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE

EPREUVES ESC

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES
OPTION TECHNOLOGIQUE

JEUDI 4 MAI 2000, de 8 h à 12 h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document ;

"L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique

est interdit pendant cette épreuve".

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'épreuve est composée de trois exercices indépendants dont les différentes parties sont elles-mêmes largement indépendantes.

Exercice 1

Soit f la fonction définie pour tout x réel par : $f(x) = (x^2 - x - \frac{3}{4}) \cdot e^{2x}$.
On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. (a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
   (b) Etudier les branches infinies de $\mathcal{C}$.

2. (a) Montrer que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que sa fonction dérivée f' change de signe en $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ et en $\frac{\sqrt{5}}{2}$.
   (b) Donner le tableau de variations de f .

3. (a) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation : $f(x) = 0$.
   (b) Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du réel x .
   (c) Déterminer une équation des tangentes à $\mathcal{C}$ aux points d'abscisses $-\frac{1}{2}$, 0 et $\frac{3}{2}$.

4. (a) Tracer les tangentes à $\mathcal{C}$ aux points d'abscisses $-\frac{\sqrt{5}}{2}$, $-\frac{1}{2}$, 0 et $\frac{\sqrt{5}}{2}$ dans un repère orthonormé d'unité 2 cm .
   (b) Tracer $\mathcal{C}$ et ses asymptotes éventuelles dans ce même repère.
   On prendra : $\frac{\sqrt{5}}{2} \simeq 1,1$; $f(-\frac{\sqrt{5}}{2}) \simeq 0,2$; $f(\frac{\sqrt{5}}{2}) \simeq -5,8$; $2e^{-1} \simeq 0,7$; $2e^3 \simeq 40$.

5. (a) Calculer l'intégrale : $I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} e^{2x}\, dx$.
   (b) Calculer, à l'aide d'intégrations par parties, les deux intégrales suivantes :
   $$J = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} x \cdot e^{2x}\, dx \qquad \text{et} \qquad K = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} x^2 \cdot e^{2x}\, dx\ .$$
   (c) Déterminer, en cm^2, l'aire de l'ensemble des points M de coordonnées (x, y) dans le repère choisi à la question 4. telles que : $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$ et $f(x) \leq y \leq 0$.
   Hachurer cet ensemble sur le graphique précédent.

Exercice 2

Partie I

1. Rappeler, pour tout réel x, la valeur de : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

2. Soit a un réel. On suppose que le nombre N de skieurs qui se présentent pendant une durée T à une remontée mécanique est une variable aléatoire dont la loi est définie par :
$$\text{pour tout entier naturel } n,\ P(N = n) = a \cdot \frac{5^n}{n!}\ .$$
   (a) Déterminer la valeur de a .
   (b) Reconnaître la loi de N et donner son espérance mathématique.

(c) En utilisant l'extrait de table fourni ci-dessous, répondre aux questions suivantes :
Pendant la durée T,

- quelle est la probabilité qu'au moins six skieurs se soient présentés à la remontée mécanique ?
- quelle est la probabilité qu'au plus deux skieurs se soient présentés à la remontée mécanique ?
- sachant qu'au moins six skieurs se sont présentés à la remontée mécanique, quelle est la probabilité qu'il y en ait eu au plus neuf ?

Extrait de la table de la loi de Poisson de paramètre 5, probabilités individuelles $p(n)$ et cumulées $F(n)$ de $\mathcal{P}(5)$:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(n)$	0,0067	0,0337	0,0842	0,1404	0,1755	0,1755	0,1462	0,1044	0,0653	0,0363	0,0181
$F(n)$	0,0067	0,0404	0,1247	0,2650	0,4405	0,6160	0,7622	0,8666	0,9319	0,9682	0,9863

Partie II

U désigne une variable aléatoire continue de loi uniforme sur l'intervalle $[0;1]$.

1. (a) Donner une densité de U .
   (b) Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire U .
   (c) Exprimer, en fonction du réel x, la probabilité : $P(U > x)$.

2. La compagnie des remontées mécaniques a installé deux guichets au bas des pistes. On estime que le temps de passage d'un skieur à l'un des guichets suit la même loi que la variable aléatoire U .
   Trois skieurs A, B et C se présentent en même temps aux guichets. A et B s'adressent simultanément aux deux guichets, C attend que A ou B libère un guichet.
   On désigne par :
   - U_1 et U_2 les temps de passage respectifs de chacun des deux skieurs A et B .
   - V le temps d'attente du skieur C .

   On supposera que les variables aléatoires U_1 et U_2 sont indépendantes.
   (a) Justifier que : pour tout x réel, $(V > x) = (U_1 > x) \cap (U_2 > x)$.
   (b) En déduire, pour tout x réel, $P(V > x)$ en fonction de $P(U > x)$.
   (c) Etablir que la variable V admet pour fonction de répartition la fonction G définie par :
   $$\begin{cases} G(x) = 0 & \text{si } x < 0 , \\ G(x) = 2x - x^2 & \text{si } x \in [0;1] , \\ G(x) = 1 & \text{si } x > 1 . \end{cases}$$
   (d) En déduire une densité de probabilité g de la variable V .
   (e) Montrer que V admet une espérance et une variance que l'on calculera.

Exercice 3

Partie I

On considère dans $M_3(\mathbb{R})$ les six matrices suivantes :

$$M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad D = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ,$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} , \quad T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -6 \\ -3 & 1 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad L = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Montrer que la matrice P est inversible et calculer P^{-1} (les détails des calculs figureront sur la copie).
   (b) On constate que : $M \cdot T = I$. En déduire que M est inversible et donner la matrice M^{-1} .

2. (a) Vérifier que : $P^{-1} \cdot M \cdot P = D$.
   (b) Pour tout entier naturel n, donner l'expression de M^n en fonction de P, D^n et P^{-1} .
   (c) Pour tout entier naturel n, exprimer les coefficients de la matrice D^n .
   (d) On désigne par Δ la matrice dont les coefficients sont les limites quand n tend vers $+\infty$ des coefficients de la matrice D^n et l'on admet que : $\lim\limits_{n\to+\infty} M^n = P \cdot \Delta \cdot P^{-1}$.
   Déterminer la matrice Δ et montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} M^n = L$.

Partie II

Une administration, dont on suppose l'effectif constant, répartit ses employés d'une année sur l'autre, au hasard entre trois secteurs A, B et C, en respectant les proportions suivantes :

- 75% des employés du secteur A y restent l'année suivante tandis que 25% vont travailler dans le secteur C,
- 75% des employés du secteur B y restent l'année suivante tandis que 25% vont travailler dans le secteur A,
- 25% des employés du secteur C y restent l'année suivante tandis que 25% vont travailler dans le secteur A et 50% dans le secteur B .

1. On désigne par a, b et c les effectifs respectifs dans les secteurs A, B et C au cours de la première année de fonctionnement. Au cours de la deuxième année, les effectifs dans les secteurs A, B et C sont respectivement de 35, 30 et 15 employés.

   On pose : $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 35 \\ 30 \\ 15 \end{pmatrix}$.

   (a) Vérifier que : $M \cdot X = B$, où M est la matrice définie dans la **partie I**.
   (b) En déduire, à l'aide de la question 1.(b) de la **partie I**, les valeurs de a, b et c .

2. La première année, un employé E travaille dans le secteur A .
   Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par :

   - A_n l'événement : "E travaille dans le secteur A la $n^{\text{ième}}$ année",
   - B_n l'événement : "E travaille dans le secteur B la $n^{\text{ième}}$ année",
   - C_n l'événement : "E travaille dans le secteur C la $n^{\text{ième}}$ année",

   et on pose : $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$, $c_n = P(C_n)$, $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to+\infty} a_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} b_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} c_n \end{pmatrix}$.

   (a) M désigne la matrice de la **partie I**. En utilisant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{A_n, B_n, C_n\}$, établir que : $U_{n+1} = M \cdot U_n$.
   (b) Montrer par récurrence que : pour tout entier naturel n non nul, $U_n = M^{n-1} \cdot U_1$.
   (c) L désigne la matrice de la **partie I** et l'on admet que : $U = L \cdot U_1$. Déterminer les limites quand n tend vers $+\infty$ des probabilités a_n, b_n et c_n .