



ESC Bordeaux, ESC Marseille-Provence, ESC Reims, ESC Rouen, ICN Nancy

#### **CONCOURS D'ADMISSION 2001**

Option scientifique

# **MATHÉMATIQUES**

Mardi 24 avril 2001 de 8 h 00 à 12 h 00

Durée: 4 heures

Aucun instrument de calcul n'est autorisé. Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé comporte 5 pages.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

LES AZZALEV

Des méthodes, des exercices, des corrigés sur le www.KlubPrepa.net



#### Exercice 1

Soient a et b deux réels strictement positifs, X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes, suivant chacune une loi exponentielle de paramètres respectifs a et b.

- 1) Déterminer la fonction de répartition, puis une densité, de la variable aléatoire X.
- 2) Montrer que Y X admet une densité, notée h, définie par :

$$h(t) = \frac{ab}{a+b} \exp(-bt)$$
 pour  $t > 0$  et  $h(t) = \frac{ab}{a+b} \exp(at)$  pour  $t \le 0$ .

On considère la variable aléatoire Z = X - Y.

- 3) Soit s un réel positif. Etablir l'égalité  $P(Z \le s) = 1 \frac{bexp(-as) + aexp(-bs)}{a+b}$
- 4) a) Montrer que Z est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.
  - b) Montrer que Z admet une espérance et la calculer.

#### Exercice 2

Soient n un entier  $\geq 2$  et E l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. I est la matrice identité de E. On note <sup>t</sup>A la transposée d'un élément A de E. Si A =  $(a_{ij})$  appartient à E, on appelle trace de A et on note tr(A), la somme  $a_{i1} + a_{i2} + ... + a_{in}$  des éléments diagonaux de A. On considère l'application g de E x E dans IR, qui à deux matrices A et B de E fait correspondre le réel  $q(A,B) = tr({}^tAB)$ .

- 1) Montrer que l'application tr qui à tout élément de E associe sa trace, est une forme linéaire sur E.
- a) Soit M une matrice de E. Montrer que tr( M ) = tr( <sup>t</sup>M ).
  - b) En déduire que, pour tout couple (A, B) de matrices de E, on a g(A, B) = g(B, A).
- Soit A un élément de E. Montrer que g(A, A) est la somme des carrés des coefficients de A.
- 4) Montrer, à l'aide des questions précédentes, que g est un produit scalaire sur E.

Soit  $\mathscr{B}$  =  $(e_1, e_2, ..., e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  et f l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  défini par :

$$f(e_1) = e_n e_1$$
, pour tout entier  $k$  tel que  $2 \le k \le n$ ,  $f(e_k) = e_{k-1}$ .

- a) Montrer que f est un automorphisme de IR<sup>n</sup>.
  - b) Soit U la matrice de f dans la base  $\mathcal{B}$ . Montrer que U<sup>n</sup> = I et que U<sup>-1</sup> =  ${}^{t}$ U.

On suppose, pour les deux questions suivantes, que n = 4.

- 6) Calculer U2 et U3 et montrer que (I, U, U2, U3) est une famille orthogonale pour le produit scalaire g.
- 7) On note F le sous espace vectoriel de E engendré par la famille (I, U, U², U³) et V la matrice de E dont la première ligne est constituée de 1 et les autres uniquement de 0. Calculer la projection orthogonale W de V sur F.

IES AZZALES





#### Problème

Dans tout le problème, n'est un entier positif ou nul, a un entier pair supérieur ou égal à 4 et p un réel tel que  $0 . Pour simplifier les écritures, on pose <math>a_n = 2^{n-1}a$ .

Un jeu est une succession de jets d'une pièce qui fait pile avec la probabilité p. Un joueur dispose initialement d'une fortune a. On note  $F_n$  la variable aléatoire égale à la fortune du joueur à l'issue du du nème lancer. On convient que  $F_0$  est la variable aléatoire certaine égale à a. On obtient la fortune  $F_{n+1}$  à partir de  $F_n$  de la manière suivante :

avant le lancer n+1, le joueur mise une partie  $X_n$ , entière, de sa fortune sur pile et l'autre partie,  $F_n - X_n$  sur face. Si le lancer n+1 fait apparaître pile, la fortune  $F_{n+1}$  est égale à  $2X_n$ , s'il fait apparaître face, la fortune  $F_{n+1}$  est égale à  $2(F_n - X_n)$ . Ainsi, à tout instant, la fortune du joueur est un entier pair, éventuellement nul.

On étudie, dans ce problème, deux exemples ( parties 1 et 2 ) dans lesquels les mises  $X_n$  sont des variables aléatoires. A cet effet, on associe aux variables aléatoires  $F_n$  des polynômes  $G_n$  dont les propriétés générales sont établies en préliminaire. Ces polynômes servent à obtenir des informations sur l'évolution de la fortune du joueur tout au long du jeu.

E(X) et V(X) désignent, quand elles existent, l'espérance et la variance de X.

#### Résultats préliminaires .

Pour tout entier positif ou nul n, montrer que F<sub>n</sub> prend ses valeurs dans { 0 , 2 , 4 , ..., 2a<sub>n</sub> }.

Pour tout entier positif ou nul n, on définit le polynôme  $G_n$  par :  $G_n(x) = \sum_{k=0}^{a_n} P(F_n = 2k) x^k$ 

- 2) a) Calculer G<sub>n</sub>(1).
  - b) Que représente concrètement  $G_n(0)$  ? Montrer, à l'aide d'un argument probabiliste, que la suite de terme général  $G_n(0)$  est croissante et convergente.
  - c) Montrer que  $G'_n(1) = E(F_n) / 2$ . Etablir de même que  $V(F_n) = 4G''_n(1) + 2E(F_n) E(F_n)^2$ .
- 3) Montrer que le polynôme G<sub>n</sub> est convexe sur IR<sup>+</sup>.

#### Première partie

Soit n un entier positif ou nut et k un entier tel que  $0 \le k \le a_n$ . On suppose dans cette partie que la loi conditionnelle de  $X_n$  sachant  $\{F_n = 2k\}$  est une loi uniforme sur  $\{0, 1, 2, ..., 2k - 1, 2k\}$ .

- 1) Etablir, pour tout entier j tel que  $0 \le j \le 2k$ , l'égalité  $P(F_{n+1} = 2j \cap F_n = 2k) = \frac{1}{2k+1} P(F_n = 2k)$ . (On pourra utiliser le système complet d'événements constitué par les deux résultats possibles du lancer n+1.)
- 2) En déduire, pour tout entier j tel que  $0 \le j \le a_{n+1}$ , une expression sommatoire de P( $F_{n+1} = 2j$ ).
- 3) Montrer que pour x appartenant à [0,1],  $G_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{a_n} \frac{x^{2k+1}-1}{(2k+1)\cdot (x-1)} P(F_n = 2k).$

Des méthodes, des exercices, des corrigés sur le www.KlubPrepa.net





- 4) En déduire, pour x appartenant à IR, l'égalité :  $(1-x)G_{n+1}(x) = \int_{x}^{1} G_{n}(t^{2}) dt$  (1)
- 5) Prouver, en dérivant deux fois cette égalité, que pour tout  $n \ge 0$ , on a E( $F_n$ ) = a.

### Deuxième partie (Les deux sous parties A et B sont indépendantes)

On suppose maintenant que la *loi conditionnelle* de la variable  $X_n$  sachant  $\{F_n = 2k\}$  est une loi binômiale de paramètres 2k et r, r étant un réel de ] 0 , 1 [.

#### A) Simulation informatique de l'expérience

On considère le programme suivant :

La fonction " random " est une fonction sans argument. A son appel, l'ordinateur génère un nombre aléatoire compris entre 0 et 1, nombre qui suit une loi uniforme sur [0 , 1]. L'instruction " randomize " est utilisée pour obliger l'ordinateur à générer un nouveau nombre à chaque appel de la fonction.

La fonction " mise " est une fonction qui simule une loi binômiale de paramètres m et s. Elle doit donc prendre, à chaque appel, une valeur aléatoire entière comprise au sens large entre 0 et m, la probabilité qu'elle prenne une valeur donnée étant celle fournie par la loi binômiale de paramètres m et s.

- 1) Rédiger les lignes manquantes (déclarations et instructions) dans la définition de la fonction "mise".
- 2) Rédiger les instructions manquantes du corps principal du programme de telle sorte que celui-ci calcule et affiche les fortunes successives F<sub>1</sub>, ..., F<sub>n</sub> du joueur, les paramètres a, r, p, n étant fournis par l'utilisateur.



#### B) Etude théorique

Dans toute cette partie, on posera  $A = pr^2 + (1 - p)(1 - r)^2$  et B = 2[pr + (1 - p)(1 - r)].

1) En procédant comme dans les trois premières questions de la première partie, montrer que pour tout réel x et tout entier  $n \ge 0$ , on a :  $G_{n+1}(x) = p G_n[(xr+1-r)^2] + (1-p) G_n[(x-xr+r)^2]$ . (2)

Dans les questions 2 et 3, on suppose que p = 1/2.

On considère le trinôme Q, défini par Q(x) =  $Ax^2 + 2r(1-r)x + A$ , et la suite  $(u_n)$  définie par la condition initiale  $u_0 = 0$  et, pour tout entier  $n \ge 0$ , par la relation de récurrence  $u_{n+1} = Q(u_n)$ .

- 2) a) Montrer, pour tout réel x, l'égalité :  $Q(x) = x + A(x-1)^2$ .
  - b) Montrer que l'intervalle [0, 1] est stable par Q.
  - c) Montrer que la suite (u<sub>n</sub>) est croissante et convergente. Donner la valeur de sa limite.
- 3) a) Montrer, en utilisant ( 2 ) et la convexité de  $G_n$ , que pour tout entier  $n \ge 0$  et tout réel  $x \ge 0$ , on a l'inégalité :  $G_{n+1}(x) \ge G_n[Q(x)]$ .
  - b) Etablir, pour tout entier  $n \ge 0$ , l'inégalité :  $G_{n+1}(0) \ge G_1(u_n)$ . Conclure.

On revient au cas général p quelconque.

- 4) a) Montrer à l'aide de (2), que la suite (E(F<sub>n</sub>))<sub>n</sub> est géométrique de raison B.
  - b) En posant p' = 1/2 p et r' = 1/2 r, étudier la limite de cette suite suivant les valeurs de p et r.
  - c) Montrer que si la suite  $(E(F_n))_n$  tend vers 0, alors la suite  $(P(F_n = 0))_n$  tend vers 1.
- 5) a) Pour tout entier  $n \ge 0$ , établir à l'aide de ( 2 ) une relation entre  $G''_{n+1}(1)$ ,  $G''_{n}(1)$  et  $G'_{n}(1)$ .
  - b) Montrer que la suite de terme général  $v_n = G_n^n(1) / B^n$  est arithmético-géométrique.
  - c) En déduire, pour tout entier  $n \ge 0$ , une expression explicite de  $G''_n(1)$  en fonction de a, n, A, B.

On suppose, dans cette demière question, que p = r = 1/3.

- 6) a) Calculer les trois réel A, B, B<sup>2</sup> et en déduire un équivalent de V(F<sub>n</sub>) quand n tend vers l'infini.
  - b) Montrer, à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev, que la probabilité P( $F_n < 2^{n/4}$  a) tend vers 1 quand n tend vers l'infini. (On utilisera les inégalités :  $2^{1/4} > 10/9$  et  $3 \cdot \sqrt{2} > 4$ .)

#### Fin de l'épreuve